

Hinweis: Auf der homepage befindet sich eine zusätzliche Aufgabe mit Schritt- für Schrittanleitung (inklusive Lösung), welche mit Vorteil vor Aufgabe 1 bearbeitet wird.

11.1. Abhängigkeitsgebiet (korrigiert). Wir betrachten die folgende inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = e^{-t} + \cos(x + 2) \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimme und zeichne das Abhängigkeitsgebiet an den Punkten $(0, 1)$, $(0, 3)$ und $(2, 4)$.

(b) Finde die Lösung des Problems mit Hilfe der Formel von d'Alembert.

11.2. Einflussgebiet. Es sei u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei die Funktionen f und g durch

$$f(x) := \begin{cases} (4 - x^2)^3, & \text{falls } |x| < 2, \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 2, \end{cases}$$
$$\text{und } g(x) := \begin{cases} (1 - x^2)^3, & \text{falls } |x| < 1, \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

gegeben seien.

Beweise, dass u auf dem Bereich

$$D := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : x \geq t + 2 \text{ oder } x \leq -t - 2\}$$

identisch verschwindet.

11.3. Fouriertransformation. Definiere $f(t) = e^{-|t|}$.

(a) Berechne $f * f$, wobei $*$ die Faltung bezeichne.

(b) Berechne \hat{f} , die Fouriertransformation von f .

(c) Berechne $\mathcal{F} \left[|t| e^{-|t|} \right]$.