12.1. Laplacegleichung auf der Halbebene.

Finde die beschränkte Lösung folgender Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \{y > 0\} \\ u(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$ die charakteristische Funktion ist.

Berechne auch, was die Randwerte der Lösung sind, also $\lim_{y\to 0} u(x,y)$. (Es ist in Ordnung, wenn dies an einigen Punkten nicht mit der vorgeschriebenen Funktion übereinstimmt, dies kann aber nur bei Unstetigkeitsstellen geschehen.)

12.2. Duhamels Prinzip (Prüfung Februar 2013). Löse folgende Aufgabe unter Verwendung von Duhamels Prinzip:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x^2 & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

12.3. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten. *Bemerkung: Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten wird in Zukunft sowohl in den Übungen als auch in der Vorlesung benutzt.*

Wenn wir eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x,y)$ betrachten, ist es möglich, diese in Polarkoordinaten:

$$\begin{cases} x = x(r,\phi) = r\cos(\phi) \\ y = x(r,\phi) = r\sin(\phi) \end{cases}$$

auszudrücken, d.h. $u(r,\phi) = u(x(r,\phi), y(r,\phi))$.

(a) Drücke die folgende Funktionen in Polarkoordinaten aus:

$$u_1(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$u_2(x,y) = x + y + y^2,$$
$$u_3(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Mit der Kettenregel können wir dann diese Funktionen sowohl nach r als auch nach ϕ partiell ableiten.

(b) Überprüfe mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt

$$\partial_r u(r,\phi) = (\partial_x u)\cos\phi + (\partial_y u)\sin\phi$$
$$\partial_\phi u(r,\phi) = -(\partial_x u) r\sin\phi + (\partial_y u) r\cos\phi.$$

Damit erhalten wir ein die folgende Relation für die partiellen Ableitungen $\partial_x u$ und $\partial_y u$:

$$\begin{pmatrix} \partial_r u \\ \partial_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}.$$

(c) Beweise mit Hilfe einer Inversion der Matrix, dass in Komponentenschreibweise gilt:

$$\partial_x u = \cos\phi(\partial_r u) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi u),$$
$$\partial_y u = \sin\phi(\partial_r u) + \frac{1}{r}\cos\phi(\partial_\phi u).$$

Berechne dann mit diesen Formeln und mit Hilfe der Kettenregel die Ausdrücke $\partial^2_{xx} u$ und $\partial^2_{yy} u$ in Polarkoordinaten, das heisst

$$\partial^2_{xx} u = \partial_x(\partial_x u) = \cos\phi(\partial_r(\partial_x u)) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi(\partial_x u)) = ...$$

(d) Fasse das Ergebnis zusammen, um zu folgern, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet:

$$\boxed{\Delta u(r,\phi) = \partial^2_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u.}$$