13.1. Berechnung von Δ. Sei $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Berechne Δf für folgende Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^2$, in kartesischen Koordinaten

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = e^{|\vec{x}|^2}$, in Polarkoordinaten

(c) $f : \{1 < |x| < 2\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \frac{x_1^2}{|\vec{x}|^2}$ in Polarkoordinaten.

13.2. Laplace-Gleichung auf dem Kreis. Löse die folgenden Probleme auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $u \in C^2(B_1(0), \mathbb{R})$. Schreibe die Lösungen sowohl in kartesischen- als auch in Polarkoordinaten.

(a)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = (x^2+y^2)^2 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = y + x^2 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 4x^3 - 3x & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$