14.1. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck I. Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck. Bestimme die Lösung $u : R \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wobei

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ -\sin(2\pi y)\cos(2\pi y) & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist,}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} x(x-1) & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$

14.2. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck II (Prüfung Februar 2012). Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck. Bestimme die Lösung $u : R \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wobei

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ x^2 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$