Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Dies ist eine Schritt- für Schrittanleitung, d.h. gehe erst zur nächsten Seite, wenn du den jeweiligen Schritt gelöst/ überlegt hast, die Lösung steht jeweils auf der nächsten Seite.

Schritt 1: Beschreibe das Problem.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \frac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Die Gleichung ist von zweiter Ordnung, linear und nicht homogen. Die homogenisierte Gleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ (die Wellengleichung) ist hyperbolisch.

Schritt 2: Partikuläre Lösung.

Wenn wir, wie hier, eine nicht homogene Gleichung haben, können wir stattdessen eine homogenisierte Gleichung betrachten, indem wir eine beliebige partikuläre Lösung subtrahieren, die entstandene homogene Gleichung lösen und am Ende die homogene und die partikuläre Lösung addieren.

Finde zuerst eine (beliebige) partikuläre Lösung v, d.h. v soll erfüllen, dass

$$v_{tt} - 4v_{xx} = \sin x + e^t.$$

Die Anfangswerte können (/sollen) hierbei ignoriert werden. Auf der nächsten Seite folgt ein Tipp, um eine partikuläre Lösung zu finden.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Tipp zu Schritt 2: Auf der rechten Seite stehen Funktionen, die nur entweder die Variable x oder die Variable t haben. Versuche deshalb, eine partikuläre Lösung von der gleichen Form zu finden, d.h. $v(x,t) = v_1(x) + v_2(t)$. Setze dies in die Gleichung $v_{tt} - 4v_{xx} = \sin x + e^t$ ein.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Es gibt unendlich viele partikuläre Lösungen, durch Einsetzen lässt sich prüfen, ob die jeweilige Lösung tatsächlich eine ist. Auf der letzten Seite folgt eine beispielhafte Rechnung.

Schritt 3: Definiere $w = u - v$, wobei wir annehmen, dass u das ursprüngliche Problem löst. Welche Gleichung erfüllt w?

(Falls du keine partikuläre Lösung gefunden hast, nimm $v = \frac{1}{4}\sin x + e^t$. Überprüfe aber zuerst, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.)

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

---

w erfüllt eine Gleichung der Form

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

f und g hängen davon ab, wie genau v gewählt wurde (auch hierzu folgt weiter unten ein Beispiel). Entscheidend ist hier, dass die Gleichung nun homogen ist.

Schritt 4: Mit welcher Methode kann man diese Gleichung für w lösen? Wende diese Methode an.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + e^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Wir haben eine homogene Wellengleichung auf der unendlich langen Saite, d.h. mit der Formel von d'Alembert kriegen wir eine Lösung für w.

Schritt 5: Die Lösung für u ist nun gegeben durch

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = \frac{1}{4}\sin x + e^t - 1 + \cos x \cos(2t) + xt.$$

Überlege dir noch einmal, warum $u = w + v$ Sinn macht und insbesondere unabhängig davon ist, wie v gewählt wurde.

Wenn wir statt v eine andere Funktion $\tilde{v}$ gewählt hätten, dann hätten sich die Anfangsbedingungen für w geändert und zwar in genau so einer Weise, dass es sich nachher wieder rauskürzt, wenn wir ganz am Ende $u = v + w$ rechnen. (Beachte hierbei auch, dass wenn wir die zwei partikulären Lösungen v und $\tilde{v}$ voneinander subtrahieren, dann kriegen wir erneut eine Lösung des homogenen Problems. Wiederum spielen hier die Anfangswerte des ursprünglichen Problems keine Rolle.)

Beispiellösung:

Schritt 2: Setzen wir wie im Tipp oben $v(x,t) = v_1(x) + v_2(t)$, so ergibt sich:

$$v_{2,tt} - 4v_{1,xx} = \sin x + e^t.$$

Da wir nur eine einzige Lösung wollen, zerlegen wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} v_{2,tt} &= e^t, \\ -4v_{1,xx} &= \sin x. \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen hat wiederum unendlich viele Lösungen, wir wählen je eine davon aus und addieren (Superpositionsprinzip), so kriegen wir beispielsweise:

$$v(x,t) = \frac{1}{4}\sin x + e^t.$$

Schritt 3: Beachte, dass $v(x,0) = \frac{1}{4}\sin x + 1$ und $v_t(x,0) = 1$, also ergibt sich für $w = u - v$:

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \quad w(x,0) = \cos x - 1 & x \in \mathbb{R} \\ \quad w_t(x,0) = x & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Schritt 4: Wende nun d'Alembert auf w an:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}(\cos(x+2t) - 1 + \cos(x-2t) - 1) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} s\,ds \\ &= -1 + \cos x \cos(2t) + xt. \end{aligned}$$