Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \,. \end{cases}$$

Dies ist eine Schritt- für Schrittanleitung, d.h. gehe erst zur nächsten Seite, wenn du den jeweiligen Schritt gelöst/ überlegt hast, die Lösung steht jeweils auf der nächsten Seite.

Schritt 1: Beschreibe das Problem.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \, . \end{cases}$$

Die Gleichung ist von zweiter Ordnung, linear, homogen und parabolisch.

Schritt 2: Mit welcher Methode kann man dieses Problem lösen?

(Die folgenden Schritte führen durch diese Methode.)

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \,. \end{cases}$$

Es handelt sich hier um eine homogene Wärmeleitungsgleichung auf einem endlichen Stab, man kann also die Methode der Separation der Variablen nutzen.

Schritt 3: Setze $u(x,t) = X(x)T(t)$ für zu bestimmende Funktionen X und T. Welche Gleichungen erfüllen diese beiden Funktionen?

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+\,. \end{cases}$$

Setzen wir in $u_t - u_{xx} = 0$ ein, erhalten wir $T'X - TX'' = 0$, also

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Damit dies für alle x und t erfüllt ist, muss dies einer Konstante entsprechen, nenne wir diese k. Damit erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} T'(t) &= kT(t) \\ X''(x) &= kX(x). \end{aligned}$$

Zusätzlich kriegen wir aus $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ dass $X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$ für alle t, also

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

($T \equiv 0$ würde zwar diese Anfangswerte auch erfüllen, die Lösung $u \equiv 0$, welche sich daraus ergibt, würde dann aber die Anfangswerte für $u(x,0)$ offensichtlich nicht mehr erfüllen.)

Schritt 4: Löse die Gleichung für T (in Abhängigkeit der bisher unbestimmten Konstante k).

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \,. \end{cases}$$

$$T(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Schritt 5: Löse die Gleichung für X. Unterscheide nach k.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \,. \end{cases}$$

Wenn $k \geq 0$ ist, so hat X wegen den Randbedingungen nur die triviale Lösung. (Für $k = 0$ hat die Gleichung die Lösung $ax + b$ für Konstanten a und b, damit $X(0) = X(\pi) = 0$ müssen $a, b = 0$ sein. Ist $k > 0$ so haben wir $ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x}$, was wiederum nur mit $a = b = 0$ die Anfangsbedingungen erfüllt.)

Nehmen wir also an, dass $k < 0$ und setzen $k = -\omega^2$ (für ein passendes, positives ω). Die allgemeine Lösung von $X'' = kX$ ist dann

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Mithilfe der Anfangswerte können wir a und b bestimmen: Es muss gelten

$$0 \overset{!}{=} X(0) = a + 0$$
$$0 \overset{!}{=} X(0) = a\cos(\omega\pi) + b\sin(\omega\pi)$$

also $a = 0$ und entweder $b = 0$ (der Fall ist nutzlos, weil die triviale Lösung) oder $\omega = n \in \mathbb{N}$ und b beliebig. Somit sind die Lösungen für X:

$$X_n(t) = b_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{R}.$$

Schritt 6: Superposition.

Setze nun die verschiedenen Lösungen zusammen, um die allgemeine Lösung für u zu kriegen.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \,. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t},$$

wobei wir nun genutzt haben, dass $T(t) = Ce^{kt}$ mit $k = -\omega^2 = -n^2$. (Die Konstante C von der Lösung T kann ignoriert werden, da wir bereits die Konstante b_n von der Lösung von X haben.)

Schritt 7: Nutze die Anfangsbedingung, um b_n zu bestimmen und damit zur endgültigen Lösung zu kommen.

Aufgabe: Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+\,. \end{cases}$$

Im Allgemeinen müsste man jetzt die Fourierreihe der Anfangsbedingung berechnen, allerdings ist in diesem Fall die Anfangsbedingung bereits eine endliche Fouriersumme, dieser Schritt kann also ausgelassen werden und wir können direkt gleichsetzen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} 5\sin(4x) + 7\sin(8x).$$

Somit ist $b_4 = 5$, $b_8 = 7$ und alle anderen b_n verschwinden. Die Lösung lautet damit

$$u(x,t) = 5\sin(4x)e^{-16t} + 7\sin(8x)e^{-64t}.$$