Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 & t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 & x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) & x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Dies ist eine Schritt- für Schrittanleitung, d.h. gehe erst zur nächsten Seite, wenn du den jeweiligen Schritt gelöst/ überlegt hast, die Lösung steht jeweils auf der nächsten Seite.

Schritt 1: Beschreibe das Problem.

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 & & x \in (0, \pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 & & t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 & & x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) & & x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$

Die Gleichung ist linear, 2. Ordnung, homogen und hyperbolisch.

Schritt 2: Mit welcher Methode kann man dieses Problem lösen?

(Die folgenden Schritte werden durch diese Methode führen.)

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) && x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Es handelt sich hier um eine Wellengleichung auf einer endlich langen Saite, es bietet sich also an, den Ansatz der Separation der Variablen zu verwenden.

Schritt 3: Setze $u(x,t) = X(x)T(t)$. Welche Gleichungen erfüllen die beiden Funktionen X und T?

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 & x \in (0,\pi)\,,\ t>0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 & t>0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 & x\in(0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) & x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{4T(t)} = -\lambda = \text{konstant.}$$

Es gilt somit die beiden DGlen

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T''(t) + 4\lambda T(t) = 0$$

zu lösen. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ergeben für X das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad x \in (0,\pi)\,, \\ X(0) = X(\pi) &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Schritt 4: Löse die Gleichung für X und bestimme hierbei den möglichen Wert /die möglichen Werte von λ.

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) && x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$

Damit die Lösung nicht trivial ist, muss $\lambda > 0$ sein. Beachte das Vorzeichen, mit dem λ gewählt wurde! (Für $\lambda = 0$ ergibt sich $X(x) = ax + b$, dies erfüllt die Randbedingungen $X(0) = X(\pi) = 0$ nur für $a = b = 0$. Ist $\lambda < 0$, so ist die Lösung $X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$ und wiederum würde $a = b = 0$ folgen.)

Für positives λ ist die allgemeine Lösung von X dann

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Die Randbedingungen ergeben

$$\begin{aligned} &0 \stackrel{!}{=} X(0) = a \\ &0 \stackrel{!}{=} X(\pi) = a\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + b\sin(\sqrt{\lambda}\pi). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass $a = 0$, $\lambda = n^2$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und b beliebig. Somit sind die Lösungen für X:

$$X_n(x) = b_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{R}.$$

Schritt 5: Löse nun die Gleichung für T.

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) && x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$

Die Gleichung für T lautet (mit $\lambda = n^2$)

$$T''(t) + 4n^2 T(t) = 0\,.$$

Die beiden Fundamentallösungen sind

$$T_n(t) = \sin(2nt) \quad \text{und} \quad T_n(t) = \cos(2nt)\,,$$

das heisst

$$T_n(t) = A_n \sin(2nt) + B_n \cos(2nt), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Schritt 6: Superposition.

Setze nun die verschiedenen Lösungen zusammen, um die allgemeine Lösung für u zu finden.

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) && x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(2nt) + B_n \sin(2nt)\right] \sin(nx)\,,$$

wobei die Konstante b_n von der Lösung von X_n jeweils mit den Konstanten der Lösungen für T_n verrechnet wurden.

Schritt 7: Nutze die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = 0$ um entweder A_n oder B_n zu bestimmen. (Welche?)

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) && x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } \ 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für } \ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$

Setzen wir die genannte Anfangsbedingung ein, ergibt sich

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left[-A_n \sin(2n\cdot 0) + B_n \cos(2n \cdot 0)\right] \sin(nx) \overset{!}{=} 0\,.$$

Dies kann nur dann für alle x erfüllt sein, falls $B_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Somit bleibt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2nt)\sin(nx)\,.$$

Schritt 8: Nutze die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, um A_n zu bestimmen und die endgültige Lösung zu kriegen.

Löse das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 \qquad x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \qquad t > 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0 \qquad x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) &= f(x) \quad x \in (0,\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Damit

$$f(x) \stackrel{!}{=} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx),$$

müssen A_n die Fourierkoeffizienten von f sein und zwar genauer von der ungeraden Fortsetzung von f, da wir nur die Terme mit sin sehen. Wir berechnen diese Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}x\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx \\ &\quad - \frac{2}{n\pi}(\pi - x)\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos(2nt)\sin(nx)\,.$$

Da $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0$ für $n \in 2\mathbb{N}$, folgt

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos(2(2n-1)t)\sin((2n-1)x)\,.$$