# Lösung

**1.** Wir berechnen zuerst die Koeffizienten $b_n$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi^2\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{\pi}{n}((-1)^n-1) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\sin(nx)\,dx
\end{aligned}$$

Das zweite Integral berechnen wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\sin(nx)\,dx &= -\frac{1}{n}(\pi-x)^2\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^2}(\pi-x)\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}((-1)^n-1)
\end{aligned}$$

Damit

$$b_n = \frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n-1)\,.$$

[3 Punkte, -1 Punkt pro Fehler in der Berechnung]

Ähnlich berechnen wir die Koeffizienten $a_n$ für $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{0}\pi^2\cos(nx)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n}(\pi-x)^2\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{2}{n^2}(\pi-x)\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

[2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler in der Berechnung]

**Bitte wenden!**

Für $a_0$ folgt einfach

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi^2\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2\,dx = \frac{4}{3}\pi^2\,.$$

[1 Punkt]

Die Fourierreihe ist

$$f(x) \sim \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}\cos(nx) + \left[\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right]\sin(nx)$$

Setzen wir $x = 0$ erhalten wir, da $f(x)$ stetig in $0$ ist,

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\,.$$

Damit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

[1 Punkt]

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\frac{1}{2}\left(f(\pi+) + f(\pi-)\right) = \frac{\pi^2}{2} = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

Damit

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

[1 Punkt]

**2.** Dank der Relation

$$xf(x) = i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$$

müssen wir nur die Fouriertransformation von

$$g(x) = e^{-|x|}\cos(x)$$

[2 Punkte]

**Siehe nächstes Blatt!**

berechnen. Da

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

können wir $g(x)$ als

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{(i-1)x} + e^{-(i+1)x}\right) & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}\left(e^{(i+1)x} + e^{(1-i)x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

[2 Punkte]

schreiben. Damit können wir die Fouriertransformation von $g(x)$ leicht berechnen

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(e^{(i-1)x} + e^{-(i+1)x}\right) e^{-ix\xi}\, dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\left(e^{(i+1)x} + e^{(1-i)x}\right) e^{-ix\xi}\, dx \\ &= -\frac{1}{2(i-1-i\xi)} + \frac{1}{2(i+1+i\xi)} + \frac{1}{2(i+1-i\xi)} + \frac{1}{2(1-i-i\xi)} \\ &= \frac{1+i}{2i+\xi^2} + \frac{1-i}{-2i+\xi^2} = \frac{4(2+\xi^2)}{4+\xi^4}\,.\end{aligned}$$

[2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler in der Berechnung]

Damit können wir nun $\hat{f}(\xi)$ leicht berechnen

$$\hat{f}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\hat{g}(\xi) = -\frac{8\xi\left(-4+4\xi^2+\xi^4\right)}{\left(4+\xi^4\right)^2}\,.$$

[2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler in der Berechnung]

**Alternativer Weg.** Aus

$$xf(x) = i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$$

und

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

folgt

$$\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\cos(x)\right) = \frac{i}{2}\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi+1) + \frac{i}{2}\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi-1)\,.$$

Da

$$\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

**Bitte wenden!**

folgt

$$\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\cos(x)\right) = i\frac{d}{d\xi}\frac{1}{1+(\xi+1)^2} + i\frac{d}{d\xi}\frac{1}{1+(\xi-1)^2}$$
$$= \frac{-2i(\xi+1)}{(1+(\xi+1)^2)^2} + \frac{-2i(\xi-1)}{(1+(\xi-1)^2)^2}\,.$$

**3.** Das ist eine inhomogene Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und wir können deshalb die Formel von d'Alembert anwenden

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,,$$

wobei in unserem Fall

$$f(x) = x\,,\quad g(x) = \sin(x)\quad \text{und}\quad F(x,t) = 2\sinh(x)\,.$$

[3 Punkte]

Wir berechnen leicht

$$u(x,t) = x + \frac{1}{2}\left(\cos(x-t) - \cos(x+t)\right) + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \sinh(\xi)\,d\xi\,d\tau$$
$$= x + \frac{1}{2}\left(\cos(x-t) - \cos(x+t)\right) + \int_0^t \cosh(x+(t-\tau)) - \cosh(x-(t-\tau))\,d\tau$$
$$= x + \frac{1}{2}\left(\cos(x-t) - \cos(x+t)\right) + \sinh(x+t) - 2\sinh(x) + \sinh(x-t)$$

[3 Punkte]

**4.** Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

$$\frac{T'(t)}{12T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 = \text{konst.}$$

[2 Punkte]

Die allgemeine Lösung der zweiten DGl ist offensichtlich

$$X(x) = a_n\cos(\omega x) + b_n\sin(\omega x)\,.$$

Wegen den Randbegingunen

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

**Siehe nächstes Blatt!**

schliessen wir leicht $\omega = n$ und $a_n = 0$. Als Lösung für $T$ erhalten wir

$$T(t) = e^{-12n^2 t}\,.$$

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-12n^2 t}\,.$$

[2 Punkte]

Wir müssen nur noch die Koeffizienten $b_n$ bestimmen. Dazu benutzen wir

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))\,.$$

Wir berechnen

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3(x)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{falls} \quad n = 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{falls} \quad n = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[2 Punkte]

Die Lösung $u$ ist somit

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-12t}\sin(x) - \frac{1}{4}e^{-108t}\sin(3x)\,.$$

**5.** **a)** **Behauptung:** $u(x,y) < \min\{x, 0\}$
Mit dem Maximumsprinzip folgt sofort

$$u(x,y) \leq \max_{(u,v)\in D} u(u,v) \leq \max_{(u,v)\in \partial D} u(u,v) = 0 \quad \forall\, (x,y) \in D\,. \tag{1}$$

[2 Punkte]

Weiter bemerken wir dass

$$v(x,y) := u(x,y) - x$$

eine harmonische Funktion ist und der Randbedinung

$$v(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

genügt.

**Bitte wenden!**

[2 Punkte ]

Wiederum mit dem Maximumsprinzip folgt

$$v(x,y) \le \max_{(u,v)\in D} v(u,v) \le \max_{(u,v)\in\partial D} v(u,v) = 0 \quad \forall\,(x,y)\in D\,. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$u(x,y) - x \le 0 \Longleftrightarrow u(x,y) \le x \quad \forall\,(x,y)\in D\,. \tag{3}$$

[1 Punkt]

Die Ungleichungen (1) und (3) ergeben die Behauptung

$$u(x,y) \le \min\{x,0\} \quad \forall\,(x,y)\in D\,.$$

[1 Punkt]

**b)** Mit der Poissonformel für den Ursprung folgt

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{12\pi}\int_{\partial B_6(0,0)} u(x,y)\,dS = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(6\cos(\vartheta), 6\sin(\vartheta))\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{3}{\pi}\sin(\vartheta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{6}{\pi}\,. \end{aligned}$$

[1 Punkt für Idee mit Poissonformel und 1 Pkt für korrekte Rechnung]

**6. a)** Wir bemerken mit einer Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+4)^2}\,.$$

[1 Punkt]

Daraus folgt sofort

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = e^{-t} + te^{-t}\,.$$

[1 Punkt]

Um die Inverse von $G(s)$ zu berechnen bemerken wir zuerst

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^3}\right) = \frac{1}{2}t^2e^{3t}\,.$$

[1 Punkt]

Sei $H(t)$ die Heaviside funktion. Dann gilt

$$\mathcal{L}(H(t-t_0)f(t-t_0)) = e^{-st_0}F(s)$$

**Siehe nächstes Blatt!**

[1 Punkt]

Somit ist die Inverse von $G(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2}H(t-7)(t-7)^2 e^{3(t-7)}\,.$$

[1 Punkt]

**b)** Berechnen wir die Laplacetransformation der DGl erhalten wir

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 6sX(s) - 6x(0) + 9X(s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$s^2X(s) + 6sX(s) + 9X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Damit

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{(s+3)^2}\,.$$

[1 Punkt]

Da

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right) = te^{-3t}$$

ist $x(t)$ gegeben durch

$$x(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} e^{-(t-\tau)}\,d\tau\,.$$

[1 Punkt]

Ausrechnen ergibt

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(-e^{-3t} + e^{-t} - 2te^{-3t}\right)$$

[1 Punkt]