D-CHAB Mathematik III August 2011
Dr. F. Da Lio

Lösung Prüfung Mathematik III

1. **a)** Wir berechnen zuerst die Koeffizienten b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx + \\ &= -\frac{x}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \end{aligned}$$

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Für a_0 berechnen wir einfach

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

[*1 Punkt*]

Zuletzt berechnen wir die Koeffizienten a_n für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{x}{n\pi}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{\cos(nx)}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\,. \end{aligned}$$

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Somit

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

b) Setzen wir den Wert $x = \pi$ in unsere Fourierreihe, bemerken wir

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(n\pi) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi) \\ &\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2}\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Da f unstetig an der Stelle $x = \pi$, folgt

$$\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(n\pi) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi)$$

[*1 Punkt*]

Daraus folgt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2}$$

und schliesslich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

[*1 Punkt*]

2. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}\right)(\xi) = e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\sin(2x-1)e^{-(2x)^2}\right)(\xi) \\
&= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\sin(x-1)e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}\left[e^{i(x-1)} - e^{-i(x-1)}\right]e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4i}e^{i\xi}\left[\mathcal{F}\left(e^{-i}e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2} - 1\right) - \mathcal{F}\left(e^{i}e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2} + 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}i}e^{i(\xi-1)}e^{-(\xi/2-1)^2/4} - \frac{1}{4\sqrt{2}i}e^{i(\xi+1)}e^{-(\xi/2+1)^2/4}\,.
\end{aligned}$$

[*6 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

3. Wir ersetzen $v = u_x$ und erhalten die Wellengleichung

[*1 Punkt für diese Idee*]

$$\left.\begin{array}{rcll}
v_{tt} - v_{xx} & = & xt & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\
v(x,0) & = & 0 & x \in \mathbb{R}\,, \\
v_t(x,0) & = & \dfrac{1}{1+x} & x \in \mathbb{R}\,.
\end{array}\right\}$$

[*1 Punkt für richtiges System*]

Siehe nächstes Blatt!

Diese inhomogene Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und können wir mit der Formel von d'Alembert lösen

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau\,,$$

wobei in unserem Fall

$$f(x) = 0\,, \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad F(x,t) = xt\,.$$

[*1 Punkt für richtige d'Alembert Formel*]

Wir berechnen leicht

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\ln|1+x+t| - \ln|1+x-t|\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi\tau\, d\xi\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|1+x+t| - \ln|1+x-t|\right) + \frac{1}{4}\int_0^t \tau\left[(x+(t-\tau))^2 - (x-(t-\tau))^2\right]\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|1+x+t| - \ln|1+x-t|\right) + \int_0^t \tau x(t-\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|1+x+t| - \ln|1+x-t|\right) + \frac{1}{6}xt^3
\end{aligned}$$

[*2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler*]

Damit folgt die allgemeine Lösung u

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int v(x,t)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[(1+x+t)\ln|1+x+t| - (1+x-t)\ln|1+x-t|\right] + \frac{1}{12}x^2t^3 + C(t)\,.
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

4. **a)** Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

$$\frac{T'(t)}{17T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 = \text{konst.}$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung der zweiten DGl ist offensichtlich

$$X(x) = a_n\cos(\omega x) + b_n\sin(\omega x)\,.$$

Wegen den Randbedingunen

$$X'(0) = X'(\pi) = 0$$

schliessen wir leicht $\omega = n$ und $b_n = 0$.

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Als Lösung für T erhalten wir

$$T(t) = e^{-17n^2 t} \,.$$

[*1 Punkt*]

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) e^{-17n^2 t} \,.$$

Wir müssen nur noch die Koeffizienten a_n bestimmen:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 2\, dx = 2$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{4}{\pi n} \left[\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right] \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -1 & (n-1) \mid 4 \\ 1 & (n-1) \nmid 4 \end{cases} \end{aligned}$$

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Somit

$$u(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} (-1)^{n+1} \cos(nx) e^{-17n^2 t} \,.$$

[*1 Punkt*]

b) Wir bemerken

$$\frac{d}{dt} W(t) = \int_0^{\pi} \partial_t u(x,t)\, dx = -\int_0^{\pi} \partial_{xx} u(x,t)\, dx = u_x(0,t) - u_x(\pi,0) = 0 \,.$$

[*2 Punkte*]

5. a) Die Funktion $u_1(x,y) - u_2(x,y)$ ist harmonisch und erfüllt die Randbedingung $1 - 2|x|$.

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Mit dem Maximumsprinzip folgt

$$u_1(x,y) - u_2(x,y) \le \max_{(x,y)\in B_1(0)} u_1(x,y) - u_2(x,y) \le \max_{(x,y)\in \partial B_1(0)} 1 - 2|x| = 1\,.$$

[*1 Punkt*]

Umgekehrt ist auch $u_2(x,y) - u_1(x,y)$ harmonisch mit Randwerten $2|x| - 1$

[*1 Punkt*]

und es folgt mit dem Maximumsprinzip

$$u_2(x,y) - u_1(x,y) \le \max_{(x,y)\in B_1(0)} u_2(x,y) - u_1(x,y) \le \max_{(x,y)\in \partial B_1(0)} 2|x| - 1 = 1$$

[*1 Punkt*]

Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu

$$u_1(x,y) - u_1(x,y) \ge -1$$

Kombinieren wir die erste und dritte Ungleichung erhalten wir

$$|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \le 1$$

[*1 Punkt*]

b) Mit der Poissonformel für den Ursprung folgt

$$\begin{aligned}
u_1(0,0) - u_2(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_1(0,0)} u_1(x,y) - u_2(x,y)\,dS \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(\cos(\vartheta),\sin(\vartheta)) - u_2(\cos(\vartheta),\sin(\vartheta))\,d\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 - 2|\cos(\vartheta)|\,d\vartheta \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos(\vartheta)\,d\vartheta = 1 - \frac{4}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

[*3 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

6. **a)** Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(F(t)) &= \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-su^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{s+3}{s^3+s^2-2s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-2} + \frac{4}{3}\frac{1}{s-1}$$

[*1 Punkt*]

Somit

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s^3+s^2-2s}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{4}{3}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-2t}\,.$$

[*1 Punkt*]

c) Wenden wir die Laplacetransformation an, erhalten wir:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

[*1 Punkt*]

Mit den Anfangsdaten vereinfacht sich dies zu

$$X(s)(s^2+1) - s = \frac{1}{s^2}$$

und somit

$$X(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}\,.$$

[*1 Punkt*]

Aus

$$\mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}\,, \quad \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}\,, \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

[*1 Punkt für richtige Inversen*]

folgt mit dem Faltungssatz

$$x(t) = \cos(t) + \int_0^t (t-\tau)\sin(\tau)\,d\tau = \cos(t) - \sin(t) + t\,.$$

[*1 Punkt*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]