Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

a) Die Funktion $f(x) = x^3 - \pi^2 x = x(x-\pi)(x+\pi)$ für $x \in (-\pi, \pi)$ ist ungerade. Deshalb gilt für die Koeffizienten $a_n = 0$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x^3 - \pi^2 x)\sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}x^3\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 3x^2\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\
&\quad +\frac{2}{\pi}\pi^2 x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi^2\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{6}{\pi n}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{6}{\pi n}x^2\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^\pi - \frac{6}{\pi n}\int_0^\pi 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{12}{\pi n^2}x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi - \frac{12}{\pi n^2}\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{12}{n^3}(-1)^n\,.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{12}{n^3}(-1)^n\sin(nx)$$

[*4 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Setzen wir den Wert $x = \pi/2$ in die Fourierreihe ein und bemerken

$$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 2m \\ (-1)^m & \text{falls} \quad n = 2m+1, \end{cases}$$

[*1 Punkt*]

folgt, da f stetig an der Stelle $x = \pi/2$ ist, dass

$$f(\pi/2) = -\frac{3\pi^3}{8} = \sum_{m=0}^\infty \frac{12}{(2m+1)^3}(-1)^{2m+1}(-1)^m$$

Bitte wenden!

[*2 Punkt*]

und wir erhalten
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

[*1 Punkt*]

2. Fouriertransformation

Um die Fouriertransformierte von $f(x) = x^2(1-|x|)^+$ zu berechnen definieren wir $g(x) := (1-|x|)^+$ und benutzen

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = -\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}(g(x))(\xi).$$

Wir berechnen die Fouriertransformierte von $g(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(x))(\xi) &= \int_0^1 (1-x)e^{-ix\xi}dx + \int_{-1}^0 (1+x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_0^1 (1-x)(e^{ix\xi} + e^{-ix\xi}dx \\
&= 2\int_0^1 (1-x)\cos(x\xi)dx \\
&= 2\left(\frac{(1-x)\sin(x\xi)}{\xi} - \frac{\cos(x\xi)}{\xi^2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\frac{1-\cos(\xi)}{\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= -2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{1-\cos(\xi)}{\xi^2} \\
&= -2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 2\frac{1-cos(\xi)}{\xi^3}\right) \\
&= 2\left(-\frac{\cos(\xi)}{\xi^2} + 2\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} + 2\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} - 6\frac{1-\cos(\xi)}{\xi^4}\right) \\
&= -2\frac{\cos(\xi)}{\xi^2} + 8\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} - 12\frac{1-\cos(\xi)}{\xi^4}
\end{aligned}$$

[*6 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Siehe nächstes Blatt!

3. Wellengleichung

Das ist eine inhomogene Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und wir können deshalb die Formel von d'Alembert anwenden

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,,$$

wobei in unserem Fall

$$f(x) = 1\,, \quad g(x) = x \quad \text{und} \quad F(x,t) = x\sin(t)\,.$$

[3 Punkte]

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 1 + \frac{(x+t)^2 - (x-t)^2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} x\sin(\tau)\,d\xi\,d\tau \\
&= 1 + xt + \int_0^t x(t-\tau)\sin(\tau)\,d\tau \\
&= 1 + xt - xt\cos(\tau)\big|_0^t + x\tau\cos(\tau)\big|_0^t - \int_0^t x\cos(\tau)\,d\tau \\
&= 1 + xt + xt(1-\cos(t)) + xt\cos(t) - x\sin(t) \\
&= 1 + 2xt - x\sin(t).
\end{aligned}$$

[3 Punkte]

4. Wärmeleitungsgleichung

Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 = \text{konst.}$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung der zweiten DGl ist offensichtlich

$$X(x) = a_n\cos(\omega x) + b_n\sin(\omega x)\,.$$

Wegen den Randbedingunen

$$X(0) = X(2) = 0$$

schliessen wir leicht $\omega = \pi n/2$ und $a_n = 0$.

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Als Lösung für T erhalten wir

$$T(t) = Ce^{-3\pi^2 n^2 t/4}\,.$$

[*1 Punkt*]

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n x/2) e^{-3\pi^2 n^2 t/4}\,.$$

Wir müssen nur noch die Koeffizienten b_n bestimmen,

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 u_0(x) \sin(\pi n x/2)\, dx \\ &= \int_0^1 x \sin(\pi n x/2)\, dx + \int_1^2 (2-x) \sin(\pi n x/2)\, dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Symmetrie der Funktion $u_0(x) = 1 - |1-x|$ erhalten wir

$$b_n = \begin{cases} 2\int_0^1 x \sin(\pi n x/2)\, dx & \text{falls} \quad n = 2m+1, \\ 0 & \text{falls} \quad n = 2m. \end{cases}$$

Für den ersten Fall berechnen wir

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= 2\int_0^1 x \sin(\pi(2m+1)x/2)\, dx \\ &= -\frac{4x}{\pi(2m+1)} \cos(\pi(2m+1)x/2)\Big|_0^1 + \frac{4}{\pi(2m+1)} \int_0^1 \cos(\pi(2m+1)x/2)\, dx \\ &= \frac{8}{\pi^2(2m+1)^2} \sin(\pi(2m+1)x/2)\Big|_0^1 \\ &= \frac{8}{\pi^2(2m+1)^2}(-1)^m. \end{aligned}$$

[*5 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2m+1)^2}(-1)^m \sin(\pi(2m+1)x/2) e^{-3\pi^2(2m+1)^2 t/4}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Laplacegleichung

Die Funktion $v(x,y) := u(x,y) - x$ erfüllt die Laplacegleichung mit drei homogenen Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{r|l} \Delta v = 0 & \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ v(0,y) = v(1,y) = 0 & \text{für } y \in [\,0,1\,] \\ v(x,0) = 0 & \text{für } x \in (\,0,1\,) \\ v(x,1) = x(x-1) & \text{für } x \in (0,1) \end{array}\right\} \tag{1}$$

[*1 Punkt*]

Wir setzen den Separationsansatz $v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ in der PDE in ein, erhalten wir

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} =: \lambda,$$

und die Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$ und $Y(0) = 0$.

[*1 Punkt*]

Das X-Problem mit den Randbedingungen besitzt nur für $\lambda =: -(\pi n)^2 < 0$ die nicht triviale Lösung,

$$X_n(x) = A_n \sin(\pi n x).$$

[*1 Punkt*]

Das Y-Problem hat für $\lambda = -(\pi n)^2$ die allgemeine Lösung

$$Y_n(y) = C_n \cosh(\pi n y) + D_n \sinh(\pi n y).$$

Die homogene Randbedingung liefern die Basislösungen des Y-Problems

$$Y_n(y) = D_n \sinh(\pi n y).$$

[*1 Punkt*]

Der Lösungsansatz des gesamten Problems (**??**) ergibt sich durch lineare Superposition der Basislösungen, also

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) \sinh(\pi n y).$$

Bitte wenden!

Die konstanten A_n sind nun noch mit Hilfe der inhomogenen Randbedingung in (**??**) zu bestimmen. Es soll gelten

$$v(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\pi n)\sin(n\pi x) = x^2 - x.$$

Für die Koeffizienten A_n berechen wir

$$\begin{aligned}
A_n \sinh(\pi n) &= 2\int_0^1 \left(x^2 - x\right)\sin\left(\pi n x\right)\, dx \\
&= -\frac{2x^2\cos(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{4x\cos(\pi n x)}{\pi n}\, dx - \int_0^1 2x\sin\left(\pi n x\right)\, dx \\
&= -2\frac{(-1)^n}{\pi n} + \int_0^1 x\left(\frac{4\cos(\pi n x)}{\pi n} - 2\sin(\pi n x)\right)\, dx \\
&= -2\frac{(-1)^n}{\pi n} + x\left(\frac{4\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2} + \frac{2\cos(\pi n x)}{\pi n}\right)\Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \left(4\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2} + \frac{2\cos(\pi n x)}{\pi n}\right)\, dx \\
&= -2\frac{(-1)^n}{2\pi n} + 2\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{4\cos(\pi n x)}{(\pi n)^3} - \frac{2\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2}\Big|_0^1 \\
&= -4\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^3}.
\end{aligned}$$

[*3 Punkt*]

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,y) = x + v(x,y) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^3\sinh(\pi n)}\sin(\pi n x)\sinh(\pi n y).$$

[*1 Punkt*]

6. Laplacetransformation

a) Wir berechnen

$$\mathcal{L}(t\sin(2t))(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin(2t))(s) = -\frac{d}{ds}\frac{2}{4+s^2} = \frac{4s}{(4+s^2)^2}.$$

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Siehe nächstes Blatt!

b) Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{s^3 - 2s^2 - 2}{s^4 + s^2} = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2}$$

[*1 Punkt*]

Somit

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3 - 2s^2 - 2}{s^4 + s^2}\right) = \cos(t) - 2t\,.$$

[*1 Punkt*]

c) Wenden wir die Laplacetransformation an und verwenden $X = \mathcal{L}(x)$, erhalten wir:

$$s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X = \frac{4}{s^2}$$

[*1 Punkt*]

Mit den Anfangsdaten vereinfacht sich dies zu

$$(s^2 + 4)X(s) - s - 1 = \frac{4}{s^2}$$

und somit

$$X(s) = \frac{s^3 + s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)}\,.$$

[*1 Punkt*]

Aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{s^3 + s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

folgt

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right) = t + \cos(2t).$$

[*2 Punkt*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]