D-CHAB Mathematik III August 2012
Dr. F. Da Lio

Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = \cos(x)\chi_{(0,\pi)}$ für $x \in (-\pi, \pi)$ mit hilfe der Euler Formeln.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos(x)\,dx = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \cos(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\delta_{1n} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\sin(x)\sin(nx)\Big|_0^\pi - n\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{-n}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{n}{\pi}\left(\cos(x)\cos(nx)\Big|_0^\pi + n\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{n}{\pi}(-(-1)^n - 1) + n^2 b_n.
\end{aligned}
$$

[a_0 *1 Punkte,* a_n *2 Punkte,* b_n *4 Punkte*]

Falls $n = 2m \geq 2$ gerade ist folgt

$$b_n = \frac{4m}{\pi(4m^2-1)}$$

und für $n \geq 1$ ungerade gilt $b_n = 0$. Wir erhalten Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\cos(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m}{\pi(4m^2-1)}\sin(2mx).$$

[*1 Punkte*]

Bitte wenden!

2. Fouriertransformation

Um die Fouriertransformierte von $f(x) = x^2 e^{-2|x|}$ zu berechnen benutzen wir

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = -\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}(g(x))(\xi).$$

Wir berechnen die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-2|x|}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(x))(\xi) &= \int_0^\infty e^{-(2+i\xi)x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{(2-i\xi)x}dx \\
&= \frac{1}{2+i\xi} + \frac{1}{2-i\xi} \\
&= \frac{4}{4+\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= -\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{4}{4+\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\frac{8\xi}{(4+\xi^2)^2} \\
&= \frac{8}{(4+\xi^2)^2} - \frac{8\xi 4\xi}{(4+\xi^2)^3} \\
&= \frac{8(4-3\xi^2)}{(4+\xi^2)^3}\,.
\end{aligned}$$

[*6 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

3. Wellengleichung

Wir lösen die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= F(x,t) = x(t+2)e^t & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\
u(x,0) &= f(x) = 0 & x \in \mathbb{R}\,, \\
u_t(x,0) &= g(x) = x & x \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

mit hilfe der Formel von d'Alembert

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi(\tau+2)e^\tau\,d\xi\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

[2 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

Wir berechnen die Integrale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s\,ds &= \frac{1}{4}\left((x+t)^2-(x-t)^2\right)\\ &= xt\end{aligned}$$

[1 Punkte]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi(\tau+2)e^\tau \,d\xi\,d\tau &= \int_0^t x(t-\tau)(\tau+2)e^\tau\,d\tau\\ &= -2xt - \int_0^t x(-2\tau-2+t)e^\tau\,d\tau\\ &= -2xt - x(-2t-2+t)e^t + x(-2+t)\\ &\quad + \int_0^t -2xe^\tau\,d\tau\\ &= -xt + x(t+2)e^t - 2x - 2x(e^t-1)\\ &= -xt + xte^t\,.\end{aligned}$$

[3 Punkte]

Wir erhalten die Lösung $u(x,t) = xte^t$.

4. Wärmeleitungsgleichung

Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 = \text{konst.}$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung der ersten DGl ist

$$T(t) = Ce^{-2\omega^2 t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung der zweiten DGl ist

$$X(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)\,.$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

Wegen den Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$ schliessen wir leicht $b = 0$ und $\sin(\omega) = 0$ also $\omega = \pi n$.

[*1 Punkt*]

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x) e^{-2\pi^2 n^2 t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Mit der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \cos^2(\pi x) - 1 \\ &= \frac{1+\cos(2\pi x)}{2} - 1 \\ &= \frac{-1+\cos(2\pi x)}{2}, \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

berechnen wir die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 \frac{-1+\cos(2\pi x)}{2} \sin(\pi n x)\, dx \\ &= \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(\pi n x)\, dx \\ &= -\frac{1-(-1)^n}{\pi n} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(nx)\, dx. \end{aligned}$$

Mit der Formel

$$\int_0^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m+n \text{ gerade}, \\ \frac{2n}{n^2-m^2} & \text{falls } m+n \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{1}$$

folgt

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{-2}{\pi n} + \frac{1}{\pi}\frac{2n}{n^2-4} & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{8}{\pi n(n^2-4)} & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \end{aligned}$$

[*2 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Wir beweisen noch die Formel (1). Für $m = n$ gilt

$$\int_0^\pi \cos(nx)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx)\sin(nx)\,dx = 0.$$

Für $m \neq n$ folgt mit zweimaliger partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(mx)\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{m}\sin(mx)\sin(nx)\Big|_0^\pi + \frac{n}{m^2}\cos(mx)\cos(nx)\Big|_0^\pi \\
&\quad + \frac{n^2}{m^2}\int_0^\pi \cos(mx)\sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{n}{m^2}(1-(-1)^{m+n}) + \frac{n^2}{m^2}\int_0^\pi \cos(mx)\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

Durch auflösen dieser Gleichung erhalten wir (1).

Alternativ kann die Formel $\sin(a)\cos(b) = (\sin(a-b)+\sin(a+b))/2$ verwendet werden.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(mx)\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((n-m)x)}{n-m} - \frac{\cos((n+m)x)}{n+m}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^{n-m}}{n-m} + \frac{1-(-1)^{n+m}}{n+m}\right] \\
&= \frac{1-(-1)^{n+m}}{2}\left[\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}\right].
\end{aligned}$$

5. Laplacegleichung

Um das Dirichlet Problem

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \quad (x,y) \in B\,, \\
u &= y^3 \quad (x,y) \in \partial B\,.
\end{aligned}$$

zu lösen, benutzen wir Polarkoordinaten. Die Funktion $v(r,\vartheta) := u(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$ erfüllt das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \tfrac{1}{r}v_r + \tfrac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta} &= 0\,, \\
v(1,\vartheta) &= \sin^3(\vartheta)\,.
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

Durch einsetzten des Separationsansatzes $v(r,\vartheta) = R(r)\cdot\Theta(\vartheta)$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$v(r,\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)).$$

[*1 Punkt*]

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\sin^3(\vartheta) = \frac{3}{4}\sin(\vartheta) - \frac{1}{4}\sin(3\vartheta)$$

erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} v(r,\vartheta) &= \tfrac{3}{4} r\sin(\vartheta) - \tfrac{1}{4} r^3 \sin(3\vartheta) \\ &= \tfrac{3}{4} r\sin(\vartheta) - r^3\left(\tfrac{3}{4}\sin(\vartheta) - \sin^3(\vartheta)\right), \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

sowie

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \tfrac{3}{4}y - (x^2+y^2)\tfrac{3}{4}y + y^3 \\ &= \tfrac{3}{4}y(1-x^2-y^2) + y^3. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

6. Laplacetransformation

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{-t}(t^2+3t+4))(s) &= \mathcal{L}(t^2+3t+4)(s+1) \\ &= \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+1} \\ &= \frac{4s^2+11s+9}{(s+1)^3}. \end{aligned}$$

[*2 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$F(s) = \frac{3s^2+s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}.$$

[*1 Punkt*]

Somit folgt

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = 3e^{2t} + \sin(t).$$

Siehe nächstes Blatt!

[*1 Punkt*]

c) Wenden wir die Laplacetransformation an und verwenden $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$,

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) = \mathcal{L}\left(te^{-t}\right)(s)$$

[*1 Punkt*]

Mit den Anfangsdaten ergibt sich

$$s(s+1)Y(s) + 1 = \frac{1}{(s+1)^2}\,,$$

$$s(s+1)Y(s) = -\frac{s(s+2)}{(s+1)^2}\,,$$

$$Y(s) = -\frac{s+2}{(s+1)^3} = \frac{-1-(s+1)}{(s+1)^3}\,.$$

[*1 Punkt*]

Damit folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t}t^2 - e^{-t}t \\ &= -e^{-t}t\left(\frac{t}{2}+1\right)\,. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 42 Punkte*]