D-CHAB | Mathematik III | Februar 2013
Dr. F. Da Lio

Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

Wir bestimmen die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{falls} \quad x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{falls} \quad x \in (-\pi, 0) \end{cases} .$$

Wir berechen zuerst den Koeffizient a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (e^x - 1)\, dx \\ &= \frac{e^\pi - 1 - \pi}{\pi} . \end{aligned}$$

[*1 Punkte*]

Für die Koeffizienten a_n mit $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (e^x - 1) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{(1+in)x}}{2(1+in)} + \frac{e^{(1-in)x}}{2(1-in)} - \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{\pi(1+n^2)} . \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

Bitte wenden!

Für die Koeffizienten b_n berechenen wir

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (e^x-1)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(1+in)x}}{2i(1+in)} - \frac{e^{(1-in)x}}{2i(1-in)} + \frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(1-(-1)^n e^{\pi})n}{1+n^2} + \frac{(-1)^n-1}{n}\right] \\
&= \frac{(1-(-1)^n e^{\pi})n}{\pi(1+n^2)} + \frac{(-1)^n-1}{\pi n}\,.
\end{aligned}$$

[2 *Punkte*]

Somit erhalten wir die Fourierreihe

$$\frac{e^{\pi}-1-\pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) + \left[\frac{(1-(-1)^n e^{\pi})n}{\pi(1+n^2)} + \frac{(-1)^n-1}{\pi n}\right]\sin(nx).$$

[*1 Punkte*]

2. Fouriertransformation

Die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

besitzt die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = -i\pi\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{e^{\xi}+e^{-\xi}}.$$

a) Aus der Definition der Fouriertransformation folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathcal{F}(f)(0) = 0.$$

Alternative kann benutzt werden, dass die Funktion ungerade ist $f(-x) = -f(x)$.

[2 *Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

b) Mit der Formel $\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = i\mathcal{F}(f)'(\xi)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx &= \mathcal{F}(xf(x))(0) \\
&= i\mathcal{F}(f(x))'(0) \\
&= \pi \frac{d}{d\xi} \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} - e^{-\xi}}\bigg|_{\xi=0} \\
&= \pi \frac{(e^{\xi} + e^{-\xi})^2 - (e^{\xi} - e^{-\xi})^2}{(e^{\xi} + e^{-\xi})^2}\bigg|_{\xi=0} = \pi.
\end{aligned}$$

[*4 Punkte*]

3. Wellengleichung

Wir suchen eine Lösung der inhomogene Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= F(x,t) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\
u(x,0) &= f(x) = x^2 \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\
u_t(x,0) &= g(x) = x^2 \qquad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Dafür benutzen wir die Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,.$$

Wir berechnen

$$\frac{1}{2}\left((x+t)^2 + (x-t)^2\right) = x^2 + t^2,$$

[1 Punkte]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s^2 ds &= \frac{1}{2}\frac{(x+t)^3 - (x-t)^3}{3} \\
&= x^2 t + \frac{t^3}{3},
\end{aligned}$$

[2 Punkte]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi^2\,d\xi\,d\tau &= \int_0^t x^2(t-\tau) + \frac{(t-\tau)^3}{3} d\tau \\
&= \int_0^t x^2\tau + \frac{\tau^3}{3} d\tau \\
&= \frac{x^2t^2}{2} + \frac{t^4}{12}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

[3 Punkte]

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + x^2 t + \frac{t^3}{3} + \frac{x^2 t^2}{2} + \frac{t^4}{12}.$$

4. Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\cos(x) && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\cos(x) && x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) &= 0 && t \geq 0\,, \\ u(\pi,t) &= -\pi && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

Zuerst suchen wir eine partikuläre Lösung $v(x)$ für die gilt $-v_{xx} = x\cos(x)$. Zweimaliges Integrieren liefert $v(x) = x\cos(x) - 2\sin(x) + C_1 x + C_2$.

[2 *Punkt*]

Damit wir homogene Randbedingung erhalten wählen wir $v(0) = 0$ und $v(\pi) = -\pi$ also $C_1 = C_2 = 0$. Die Funktion $w := u - v$ erfüllt die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0 && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ w(x,0) &= 2\sin(x) && x \in (0,\pi)\,, \\ w(0,t) &= 0 && t \geq 0\,, \\ w(\pi,t) &= 0 && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

[2 *Punkt*]

Mit dem Separationsansatz $w(x,t) = W(x)T(t)$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Aus der Anfangsbedingung erhalten wir

$$w(x,t) = 2\sin(x)e^{-t}.$$

[2 *Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Die Lösung des ursprünglichen Problem ist gegeben durch $u = v + w$ also

$$u(x,t) = x\cos(x) - 2\sin(x) + 2\sin(x)e^{-t}\,.$$

[*1 Punkt*]

5. Laplacegleichung

Wir betrachten das Dirichlet Problem auf dem Einheitsball

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= (x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2 & (x,y)\in B\,,\\ u(x,y) &= 2xy & (x,y)\in \partial B\,. \end{aligned}$$

Zuerst suchen wir eine partikuläre Lösung mit $\Delta v = r^2 + r^4$. Mit dem Laplaceoperator in Polarkoordinaten

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2}\,,$$

und dem Ansatz $v(r) = r^\alpha$ erhalten wir eine Lösung

$$v(r) = \frac{r^4}{16} + \frac{r^6}{36}.$$

[*3 Punkt*]

Die Funktion $w := u - v$ erfüllte die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \Delta w(x,y) &= 0 & (x,y)\in B\,,\\ w(x,y) &= 2xy - \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{36} & (x,y)\in \partial B\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Die Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)).$$

[*1 Punkt*]

Für $(x,y)\in\partial B$ gilt $2xy = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$ und wir erhalten

$$w(r,\varphi) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{36} + r^2\sin(2\varphi),$$

[*2 Punkt*]

sowie

$$u(r,\varphi) = \frac{r^4-1}{16} + \frac{r^6-1}{36} + r^2\sin(2\varphi).$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

In kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2-1}{16} + \frac{(x^2+y^2)^3-1}{36} + 2xy.$$

6. Laplacetransformation

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}((t^2+2)\cos(2t))(s) &= = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(\cos(2t))(s) + 2\mathcal{L}(\cos(2t))(s) \\
&= \frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{s^2+4} + \frac{2s}{s^2+4} \\
&= \frac{d}{ds}\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2} + \frac{2s}{s^2+4} \\
&= \frac{-2s(s^2+4))^2 - (4-s^2)4s(s^2+4)}{(s^2+4)^2} + \frac{2s}{s^2+4} \\
&= \frac{2s}{s^2+4} - \frac{2s}{(s^2+4)^2} + \frac{4(s^2-4)}{(s^2+4)^3}.
\end{aligned}$$

[*3 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{9-2s-s^2}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}$$

[*2 Punkt*]

Somit folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9-2s-s^2}{(s+1)(s^2+4)}\right)(t) = 2e^{-t} - 3\cos(2t) + \sin(2t)\,.$$

[*1 Punkt*]

c) Um die gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) &= 0\,, t > 0\,, \\
y'(0) &= 2\,, \\
y(0) &= 0\,,
\end{aligned}$$

zu lösen, wenden wir die Laplacetransformation an und verwenden $Y = \mathcal{L}(y)$,

$$\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) - 4\,(sY - y(0)) + 5Y = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

[*1 Punkt*]

Mit den Anfangsdaten vereinfacht sich dies zu

$$(s^2 - 4s + 5)Y = 2$$

und somit

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 - 4s + 5} = \frac{2}{(s-2)^2 + 1}\,.$$

[*1 Punkt*]

Es folgt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-2)^2+1}\right) = 2e^{2t}\sin(t).$$

[*2 Punkt*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]