Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

Um die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = x + \cos(x)$ für $x \in (-\pi, \pi)$ zu berechnen, genügt es die Koeffizienten für dir Funktion $g(x) = x$ zu berechnen. Sei

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

die Fourierreihe der Funktion g. Da die Funktion $g(x) = x$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$ und mit hilfe der Euler Formeln folgt

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= -\frac{2\pi(-1)^n}{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

[*4 Punkte*]

Damit gilt

$$g(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx),$$

[*1 Punkte*]

und wir erhalten Fourierreihe von f

$$f(x) \sim \cos(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

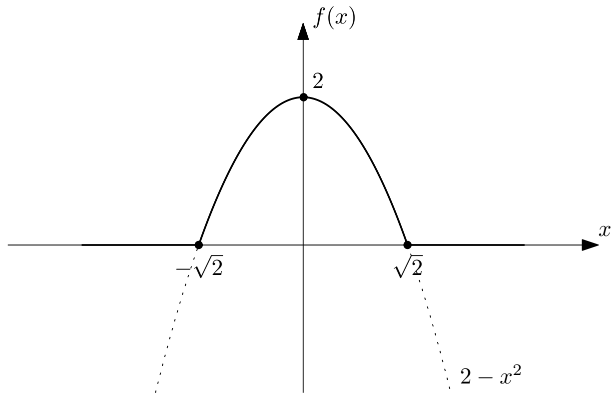
[*1 Punkte*]

Bitte wenden!

2. Fouriertransformation

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = (2-x^2)^+ = \begin{cases} 2-x^2 & x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$



[*1 Punkte*]

b) Wir berechnen die Fouriertransformierte von f per Definition,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)e^{-ix\xi}dx \\
&= \left.\frac{2e^{-ix\xi}}{(-i\xi)} - \frac{e^{-ix\xi}x^2}{(-i\xi)} + \frac{e^{-ix\xi}2x}{(-i\xi)^2} - \frac{2e^{-ix\xi}}{(-i\xi)^3}\right|_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\sqrt{2}\xi} - e^{-i\sqrt{2}\xi}}{i} - \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\sqrt{2}\xi} - e^{-i\sqrt{2}\xi}}{i} \\
&\quad + \frac{2}{\xi^2}\frac{e^{-i\sqrt{2}\xi}\sqrt{2} - e^{i\sqrt{2}\xi}(-\sqrt{2})}{(-i)^2} + \frac{2}{\xi^3}\frac{e^{i\sqrt{2}\xi} - e^{-i\sqrt{2}\xi}}{(-i)^3} \\
&= -\frac{4\sqrt{2}}{\xi^2}\cos(\sqrt{2}\xi) + \frac{4}{\xi^3}\sin(\sqrt{2}\xi)\,.
\end{aligned}$$

[*5 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

3. Wellengleichung

Wir betrachen die homogene Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 8x - 2x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 16 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds.$$

a) Mit der Formel von d'Alembert folgt

$$u(11,3) = \frac{1}{2}\left(f(14) + f(8)\right) + \frac{1}{2}\int_{8}^{14} g(s)\,ds = 0.$$

[*1 Punkte*]

$$\begin{aligned} u(5,2) &= \frac{1}{2}\left(f(7) + f(3)\right) + \frac{1}{2}\int_{3}^{7} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + 6\right)) + \frac{1}{2}\int_{3}^{4} 16\,ds \\ &= 3 + 8 = 11. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

b) Um die Lösung im Bereich $\{(x,t) :\ x \geq t,\ t \geq 0\}$ zu bestimmen benötigen wir folgende Fallunterscheidung.

i) Falls $x + t \geq x - t \geq 4$ gilt

$$u(x,t) = 0.$$

[*1 Punkte*]

ii) Falls $x + t \geq 4 \geq x - t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{4} g(s)\,ds \\ &= \frac{8(x-t) - 2(x-t)^2}{2} + 8(4 - (x-t)) \\ &= 32 - 4(x-t) - (x-t)^2. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*2 Punkte*]

iii) Falls $4 \geq x+t \geq x-t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{8(x+t)+8(x-t)-2(x+t)^2-2(x-t)^2}{2} + 8((x+t)-(x-t)) \\ &= 12(x+t)-4(x-t)-(x+t)^2-(x-t)^2 \\ &= 8x-2x^2-2t^2+16t. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

4. Wärmeleitungsgleichung

Wir lösen das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{array}{ll} u_t - 12u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 + \sin^4(x)\,. & \end{array}$$

mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$. Damit folgt

$$\frac{T'(t)}{12T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K = \text{konst.}$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung für T ist

$$T(t) = Ce^{12Kt}\,.$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung für X ist $X(x) = C\exp(\sqrt{K}x)$. Wegen der Randbedingung $X'(0) = X'(\pi) = 0$ existieren nur für $K = -\omega^2 \leq 0$ nicht triviale Lösungen der Form

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\,.$$

[*1 Punkt*]

Aus den Randbedingung folgt zudem $b = 0$ sowie $\sin(\pi\omega) = 0$ also $\omega = n \in \mathbb{N}$. Damit ist der Ansatz für die Lösung $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)e^{-12n^2t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Um die Anfangsbedingung umzuschreiben verwenden wir die Formeln

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1+\sin^4(x) \\ &= 1+\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \\ &= 1+\frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} \\ &= \frac{5}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\frac{1+\cos(4x)}{2} \\ &= \frac{11}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x). \end{aligned}$$

[*3 Punkt*]

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{11}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)e^{-12\cdot 2^2 t}+\frac{1}{8}\cos(4x)e^{-12\cdot 4^2 t}.$$

[*1 Punkt*]

5. Laplacetransformation

a) Um die inverse Laplacetransformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{s+7}{(s+1)^2(s-2)},$$

zu berechen, verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$s+7 = A(s+1)^2+B(s-2)(s+1)+C(s-2) \tag{1}$$

Durch einsetzten vom Wert $s=2$ in der Gleichung (1) folgt $9 = A3^2$ und somit $A=1$. Einsetzten vom Wert $s=-1$ ergibt $6 = C(-3)$ und es folgt $C=-2$. Um die Konstante B zu erhalten gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Beispiel einsetzen vom Wert $s=1$ ergibt $8 = 4A-2B-C = 6-2B$ und wir erhalten $B=-1$.

Bitte wenden!

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\right)\\ &= e^{2t} - e^{-t} - 2te^{-t}.\end{aligned}$$

[*4 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Wir Lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{gathered}y'' + 2y' + y = 9e^{2t}\\ y(0) = 0\\ y'(0) = 1\end{gathered}$$

mithilfe der Laplacetransformation. Die transformierte Funktion $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ erfüllt die Gleichung,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \mathcal{L}\left(9e^{2t}\right)(s) = \frac{9}{s-2}.$$

[*1 Punkt*]

Einsetzten der Anfangsdaten ergibt

$$\begin{gathered}s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) + Y(s) = \mathcal{L}\left(9e^{2t}\right)(s) = \frac{9}{s-2}\,,\\ (s+1)^2Y(s) = 1 + \frac{9}{s-2} = \frac{s+7}{s-2}\,,\\ Y(s) = \frac{s+7}{(s-2)(s+1)^2}\,,\end{gathered}$$

[*2 Punkt*]

und mit der Teilaufgabe a) folgt

$$y(t) = e^{2t} - e^{-t} - 2te^{-t}.$$

[*1 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 36 Punkte*]