Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

Wir sollen die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

der 2π periodisch Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in (0, \pi]\,, \\ 1 & \text{falls } x \in (-\pi, 0]\,. \end{cases}$$

bestimmen. Wir bemerken, dass $f(x) = 2 + g(x)$ wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (0, \pi]\,, \\ -1 & \text{falls } x \in (-\pi, 0]\,. \end{cases}$$

Da g eine ungerade Funktion ist, verschwinden ihre Fourier-Koeffizienten a_n. Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten b_n der Funktion g

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\,. \end{aligned}$$

Die zu g assoziierte Fourierreihe ist

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(nx).$$

Damit ist die zu f assoziierte Fourierreihe gegeben durch

$$f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(nx).$$

[*6 Punkte*]

Bitte wenden!

2. Fouriertransformation

Um die Fouriertransformierte von $f(x) = (1-3x)e^{-(2x-1)^2}$ zu berechnen, benutzen wir die Rechenregeln

$$\mathcal{F}(g(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(g(x))(\xi/\lambda),$$

$$\mathcal{F}(g(x+a))(\xi) = e^{ia\xi}\mathcal{F}(g(x))(\xi),$$

$$\mathcal{F}(xg(x))(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(g(x))(\xi),$$

zusammen mit der im Tipp gegebenen Formel

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-ix\xi}dx = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\,.$$

Wir berechnen schrittweise

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-(2x)^2})(\xi) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\xi^2/16} \\
\mathcal{F}(e^{-(2x-1)^2})(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16} \\
\mathcal{F}(xe^{-(2x-1)^2})(\xi) &= i\frac{d}{d\xi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16} \\
&= i(-i)\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16} + i\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16}\frac{-2\xi}{16} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{i\xi}{8}\right)e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$

$$\mathcal{F}((1-3x)e^{-(2x-1)^2})(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{3i\xi}{8}-2\right)e^{-i\xi}e^{-\xi^2/16}.$$

[*8 Punkte*]

3. Wellengleichung

Wir suchen eine Lösung der inhomogene Wellengleichung auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
u_{tt}-u_{xx} &= F(x,t) = x\cos(t/2) && x\in\mathbb{R}\,,\ t>0\,, \\
u(x,0) &= f(x) = 1-x && x\in\mathbb{R}\,, \\
u_t(x,0) &= g(x) = 1-x && x\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dafür benutzen wir die Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,.$$

Wir berechnen

$$\frac{1}{2}\Big(1-(x+t)+1-(x-t)\Big) = 1-x,$$

[1 Punkte]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(1-s)ds &= \frac{1}{2}\left((x+t)-(x-t)-\frac{(x+t)^2-(x-t)^2}{2}\right)\\ &= t-xt,\end{aligned}$$

[2 Punkte]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi\cos(\tau/2)\,d\xi\,d\tau\\ &= \int_0^t \frac{(x+(t-\tau))^2-(x-(t-\tau))^2}{4}\cos(\tau/2)\,d\tau\\ &= \int_0^t x(t-\tau)\cos(\tau/2)\,d\tau\\ &= \Big[2xt\sin(\tau/2)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t x\tau\cos(\tau/2)\,d\tau\\ &= 2xt\sin(t/2) - \Big[2x\tau\sin(\tau/2)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t 2x\sin(\tau/2)\,d\tau\\ &= \Big[-4x\tau\cos(\tau/2)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} = 4x-4x\cos(t/2).\end{aligned}$$

[3 Punkte]

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = 1+3x+t-xt-4x\cos(t/2).$$

4. Wärmeleitungsgleichung

Wir lösen das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{array}{ll} u_t(x,t)-3u_{xx}(x,t)=0 & 0<x<\pi,\ t>0,\\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 & t\geq 0,\\ u(x,0)=1-\cos^4(x) & 0\leq x\leq \pi, \end{array}$$

Bitte wenden!

mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$. Damit folgt

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K = \text{konst.}$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung für T ist

$$T(t) = Ce^{3Kt}\,.$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung für X ist $X(x) = C_1 \exp(\sqrt{K}x) + C_2 \exp(-\sqrt{K}x)$. Wegen der Randbedingung $X'(0) = X'(\pi) = 0$ existieren nur für $K = -\omega^2 < 0$ nicht triviale Lösungen der Form

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\,.$$

[*1 Punkt*]

Aus den Randbedingung folgt zudem $b = 0$ sowie $\sin(\pi\omega) = 0$ also $\omega = n \in \mathbb{N}$. Damit ist der Ansatz für die Lösung $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)e^{-3n^2t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Um die Anfangsbedingung $u(x,0) = 1 - \cos^4(x)$ umzuschreiben verwenden wir die Formeln $\cos^2(\alpha) = (1+\cos(2\alpha))/2$ und berechnen

$$\begin{aligned}
1 - \cos^4(x) &= 1 - \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) \\
&= \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{8}\cos(4x).
\end{aligned}$$

[*3 Punkt*]

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x)e^{-3\cdot 2^2 t} - \frac{1}{8}\cos(4x)e^{-3\cdot 4^2 t}.$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

5. **Laplacegleichung**

Wir betrachten das Dirichlet Problem, welches aus der Laplace Gleichung

$$\Delta u(x, y) = 0 \text{ in } R\,,$$

auf dem Einheits-Viereck $R := (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, zusammen mit der Randbedingung $u(x, y) = f(x, y)$ auf ∂R, wobei

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0 \\ \sin(2\pi x) & \text{falls} \quad y = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 2\sin(\pi y) & \text{falls} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

Wir benutzen das Superposition-Prinzip $u = u_1 + u_2$, wobei u_1, u_2 die Laplace Gleichung mit einer Randbedingung löst, welche nur an einer Kante inhomogen ist. Sein also $u_k : R \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ Lösungen der Dirichlet-Probleme

$$\begin{aligned} \Delta u_k(x, y) &= 0 && \text{in} \quad R\,, \\ u_k(x, y) &= f_k(x, y) && \text{auf} \quad \partial R\,, \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0 \\ \sin(2\pi x) & \text{falls} \quad y = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 1\,, \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0 \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 2\sin(\pi y) & \text{falls} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

[*1 Punkt*]

Wir lösen das Problem für u_1 mit dem Separationsansatz $u_1(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$. Durch einsetzen in der PDE erhalten wir

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} =: \lambda,$$

und die Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$ und $Y(0) = 0$.

Das X-Problem mit den Randbedingungen besitzt nur für $\lambda =: -(\pi n)^2 < 0$ die nicht triviale Lösung,

$$X_n(x) = A_n \sin(\pi n x).$$

Bitte wenden!

Das Y-Problem hat für $\lambda = -(\pi n)^2$ die allgemeine Lösung

$$Y_n(y) = C_n \cosh(\pi n y) + D_n \sinh(\pi n y).$$

Die homogene Randbedingung liefern die Basislösungen des Y-Problems

$$Y_n(y) = D_n \sinh(\pi n y).$$

Der Lösungsansatz des gesamten Problems ergibt sich durch lineare Superposition der Basislösungen, also

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, \sin(\pi n x) \sinh(\pi n y).$$

[*2 Punkt*]

Mit der Randbedingung erhalten wir

$$u_1(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, \sinh(\pi n) \sin(n\pi x) = \sin(2\pi x),$$

und damit verschinden alle Koeffizienten A_n ausser $A_2 = 1/\sinh(2\pi)$. Somit ist die Lösung

$$u_1(x,y) = \frac{\sin(2\pi x)\sinh(2\pi y)}{\sinh(2\pi)}.$$

[*1 Punkt*]

Analog erhalten wir

$$u_2(x,y) = \frac{2\sin(\pi y)\sinh(\pi x)}{\sinh(\pi)}.$$

[*3 Punkt*]

Damit ist die Lösung der Aufgabe gegeben durch

$$u(x,y) = \frac{\sin(2\pi x)\sinh(2\pi y)}{\sinh(2\pi)} + \frac{2\sin(\pi y)\sinh(\pi x)}{\sinh(\pi)}.$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

6. Laplacetransformation

a) Um die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{4s^2 + 5s - 11}{s^3 - 7s - 6}\,,$$

zu berechnen, Faktorisieren wir den Nenner

$$s^3 - 7s - 6 = (s+1)(s+2)(s-3).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{4s^2 + 5s - 11}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3}.$$

Wir bestimmen die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{4s^2 + 5s - 11}{(s+2)(s-3)}\right|_{s=-1} = \frac{4-5-11}{(1)(-4)} = \frac{-12}{-4} = 3,\\
B &= \left.\frac{4s^2 + 5s - 11}{(s+1)(s-3)}\right|_{s=-2} = \frac{16-10-11}{(-1)(-5)} = \frac{-5}{5} = -1,\\
C &= \left.\frac{4s^2 + 5s - 11}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=3} = \frac{36+15-11}{(4)(5)} = \frac{40}{20} = 2.
\end{aligned}$$

[*3 Punkt*]

Somit haben wir

$$F(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s-3}$$

und es folgt

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = 3e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{3t}\,.$$

[*1 Punkt*]

b) Um die gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) &= 2e^{3t}, \quad t > 0\,,\\
y'(0) &= 0\,,\\
y(0) &= 0\,,
\end{aligned}$$

zu lösen, wenden wir die Laplacetransformation an und verwenden $Y = \mathcal{L}(y)$,

$$\big(s^2Y - sy(0) - y'(0)\big) - 6\,(sY - y(0)) + 9Y = \mathcal{L}(2e^{3t})(s) = \frac{2}{s-3}.$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

Zusammen mit den Anfangsbedingungen folgt

$$(s^2 - 6s + 9)Y = \frac{2}{s-3}$$

und wir erhalten

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$

[*1 Punkt*]

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-3)^3}\right)(t) = t^2 e^{3t}.$$

[*2 Punkt*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]