Lösung Prüfung Mathematik III

1. Fourierreihe

Wir bestimmen die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion $f(x) = 1 - |x|$, für $x \in (-\pi, \pi]$. Da die Funktion f gerade ist, verschwinden die Koeffizienten $b_n = 0$, $n \geq 1$. Wir berechen zuerst den Koeffizient a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^2}{2} \right) = 2 - \pi\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkte*]

Für die Koeffizienten a_n mit $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x) \cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2}\,. \end{aligned}$$

[*4 Punkte*]

Somit erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{2 - \pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \cos(nx).$$

[*1 Punkte*]

Bitte wenden!

2. Fouriertransformation

Wir sollen die Fouriertransformierte von $f(x) = (2x-1)e^{-|2-3x|}$ berechnen. Zuerst berechnen wir die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-|x|}$ direkt,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) &= \int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\xi)x}dx \\ &= \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} \\ &= \frac{2}{1+\xi^2}\,.\end{aligned}$$

[2 *Punkte*]

Nun benutzen wir die Rechenregeln

$$\mathcal{F}(g(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(g(x))(\xi/\lambda),$$

$$\mathcal{F}(g(x+a))(\xi) = e^{ia\xi}\mathcal{F}(g(x))(\xi),$$

$$\mathcal{F}(xg(x))(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(g(x))(\xi),$$

und berechnen Schrittweise

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-|3x|})(\xi) &= \frac{2}{3(1+(\xi/3)^2))} = \frac{6}{9+\xi^2} \\ \mathcal{F}(e^{-|3x-2|})(\xi) &= \mathcal{F}(e^{-|3(x-2/3)|})(\xi) = e^{-2i\xi/3}\frac{6}{9+\xi^2} \\ \mathcal{F}(xe^{-|3x-2|})(\xi) &= i\frac{d}{d\xi}e^{-2i\xi/3}\frac{6}{9+\xi^2} \\ &= \left(i(-2i/3)\frac{6}{9+\xi^2} - i\frac{2\xi}{(9+\xi^2)^2}\right)e^{-2i\xi/3} \\ &= \left(\frac{4}{9+\xi^2} - \frac{2i\xi}{(9+\xi^2)^2}\right)e^{-2i\xi/3}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$

$$\mathcal{F}((2x+1)e^{-|3x-2|})(\xi) = \left(\frac{14}{9+\xi^2} - \frac{4i\xi}{(9+\xi^2)^2}\right)e^{-2i\xi/3}.$$

[6 *Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

3. Wellengleichung

Wir betrachen die homogene Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 4 - x^4 & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} |x| - 2 & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

Damit berechnen wir

a) Nach der d'Alembert Formel gilt die Bedingung

$$u(x_0, t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, t_0], \qquad (*)$$

falls $|x_0 - ct| \ge 2$ oder $|x_0 + ct| \ge 2$ für alle $t \in [0, t_0]$. In unserem Fall erreicht die Welle den Punkt $x_0 = -4$ zum Zeitpunkt $t_0 = 2$. (Da die Konstante c positive ist, gilt $|x_0 - ct| \ge 4$ für alle $t \ge 0$ und wir müssen nur $|x_0 + ct| \ge 2$ betrachten. Ebenso gilt $|x_0 + ct| \ge |x_0 + ct_0|$ für alle $t \in [0, t_0]$ und es genügt $t = t_0$ einzusetzen.) Die Bedienung (*) ist also für alle c mit $x_0 + ct_0 = |x_0 + ct_0| \ge 2$ erfüllt. Damit erhalten wir $c \ge (2 - x_0)/t_0 = 3$.

Mit dem selbem Argument folgt aus der Bedingung

$$u(x_0, t) \ne 0 \text{ für alle } t \in (t_0, t_0 + 1), \qquad (**)$$

dass $c \le (2 - x_0)/t$ für alle $t \in (t_0, t_0 + 1)$. Es folgt $c = 3$.

b) Mit der Formel von d'Alembert folgt

$$\begin{aligned} u(1,1) &= \frac{1}{2}\left(f(1+3) + f(1-3)\right) + \frac{1}{2}\int_{1-3}^{1+3} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}\int_0^2 (s-2)\,ds + \frac{1}{2}\int_{-2}^0 (-s-2)\,ds \\ &= -2. \end{aligned}$$

[*1 Punkte*]

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
u(5,2) &= \frac{1}{2}\left(f(5+6)+f(5-6)\right)+\frac{1}{2}\int_{5-6}^{5+6} g(s)\,ds \\
&= \frac{1}{2}(0+3)++\frac{1}{2}\int_0^2 (s-2)\,ds+\frac{1}{2}\int_{-1}^0(-s-2)\,ds \\
&= 3/2-1-3/4=-1/4.
\end{aligned}
$$

[*2 Punkte*]

4. Wärmeleitungsgleichung

Wir lösen das Anfangs- Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
u_t-2u_{xx} &= 0 && x\in(-1,1)\,,\ t>0\,, \\
u(-1,t)=u(1,t) &= 0 && t\geq 0\,, \\
u(x,0) &= 1-x^2 && x\in[-1,1]\,,
\end{aligned}
$$

mit dem Separationsansatz $u(x,t)=X(x)T(t)$. Es folgt

$$
\frac{T'(t)}{2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\omega^2=\text{konst.}
$$

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung der zweiten DGl ist offensichtlich

$$
X(x)=a_n\cos(\omega x)+b_n\sin(\omega x)\,.
$$

Wegen den Randbedingungen

$$
X(-1)=X(1)=0
$$

schliessen wir leicht $\omega=\pi n/2$.

[*1 Punkt*]

Als Lösung für T erhalten wir

$$
T(t)=Ce^{-2\omega^2 t}=Ce^{-\pi^2 n^2 t/2}\,.
$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x/2) + b_n \sin(\pi n x/2))\, e^{-\pi^2 n^2 t/2}\,.$$

Wir müssen nur noch die Koeffizienten bestimmen,

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\sin(\pi n x/2)\, dx = 0 \\
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \frac{2}{3} \\
a_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos(\omega x)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)\cos(\omega x)\, dx \\
&= \frac{2}{\omega}\sin(\omega x) - \frac{2x^2}{\omega}\sin(\omega x) - \frac{4x}{\omega^2}\cos(\omega x) + \frac{4}{\omega^3}\sin(\omega x)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{4}{\omega^2}\cos(\omega) + \frac{4}{\omega^3}\sin(\omega)
\end{aligned}$$

Mit $\omega = \pi n/2$ folgt

$$\cos(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 2m-1, \\ (-1)^m & \text{falls} \quad n = 2m. \end{cases}$$

sowie

$$\sin(\omega) = \begin{cases} (-1)^m & \text{falls} \quad n = 2m-1, \\ 0 & \text{falls} \quad n = 2m. \end{cases}$$

und wir erhalten

$$a_n = \begin{cases} 4\left(\frac{2}{\pi n}\right)^3 (-1)^m & \text{falls} \quad n = 2m-1, \\ -4\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2 (-1)^m & \text{falls} \quad n = 2m. \end{cases}$$

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^5(-1)^m}{\pi^3(2m-1)^3}\cos(\pi(2m+1)x/2)e^{-\pi^2(2m+1)^2 t/2} \\
&\quad - \frac{2^4(-1)^m}{\pi^2(2m)^2}\cos(\pi(2m)x/2)e^{-\pi^2(2m)^2 t/2}\,.
\end{aligned}$$

[*5 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Bitte wenden!

5. Poissongleichung

Wir betrachten das Dirichlet Problem auf dem Einheitsball

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 8(x^2+y^2)^3 && (x,y) \in B\,, \\ u(x,y) &= 1+y^3 && (x,y) \in \partial B\,. \end{aligned}$$

Zuerst suchen wir eine partikuläre Lösung von $\Delta v = 8r^6$. Mit dem Laplaceoperator in Polarkoordinaten

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2},$$

und dem Ansatz $v(r) = Cr^\alpha$ erhalten wir

$$C\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + C\alpha r^{\alpha-2} = 8r^6,$$

und es folgt $\alpha = 8$ und $C = 1/8$, also $v(r) = r^8/8$.

[*2 Punkt*]

Die Funktion $w := u - v$ erfüllte die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \Delta w(x,y) &= 0 && (x,y) \in B\,, \\ w(x,y) &= \tfrac{7}{8}+y^3 && (x,y) \in \partial B\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

[*1 Punkt*]

Für $(x,y) \in \partial B$ gilt $y^3 = \sin^3(\varphi) = 3\sin(\varphi)/4 - \sin(3\varphi)/4$ und wir erhalten

$$w(r,\varphi) = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} r \sin(\varphi) - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\varphi).$$

[*2 Punkt*]

Die Lösung in Polarkoordinaten ist

$$u(r,\varphi) = \frac{r^8+7}{8} + \frac{3}{4} r \sin(\varphi) - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\varphi).$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Mit der selben trigonometrischen Formal wie oben folgt

$$\begin{aligned} r^3\sin(3\varphi) &= 3r^3\sin(\varphi) - 4r^3\sin^3(\varphi) \\ &= 3(x^2+y^2)y - 4y^3 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Lösung in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^4+7}{8} + \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}(x^2+y^2)y + y^3.$$

[*2 Punkt*]

6. Laplacetransformation

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(te^{1-t}\sin(2t))(s) &= e\mathcal{L}(te^{-t}\sin(2t))(s) \\ &= -e\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t))(s) \\ &= -e\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin(2t))(s+1) \\ &= -e\frac{d}{ds}\frac{2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{4e(s+1)}{((s+1)^2+4)^2}. \end{aligned}$$

[*3 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

b) Um die inverse Laplacetransformation der Funktion

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+2s+5},$$

zu berechnen, bemerken wir, dass der Nenner keine reelle Nullstelle besitzt. Mit quadratischer Ergänzung folgt

$$\frac{2s+5}{s^2+2s+5} = \frac{2(s+1)+3}{(s+1)^2+4}.$$

[*2 Punkt*]

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+5}{s^2+2s+5}\right)(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)(t) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right)(t) \\ &= 2e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

[*Gesamtpunktzahl: 42 Punkte*]