# Lösung Prüfung Mathematik III

## 1. Fourierreihe

Um die Fourierkoeffizienten der Funktion $g(x) = f(x) + 4\cos(7x)$ für $x \in (-\pi, \pi)$ zu berechnen, genügt es, die Koeffizienten für die Funktion $f(x)$ zu berechnen. Sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

die Fourierreihe der Funktion $f$. Mithilfe der Euler Formeln folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

[*1 Punkt*]

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}(\pi - x)\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi}(1 - \cos(n\pi)). \end{aligned}$$

Daher gilt $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = \frac{2}{\pi(2n+1)^2}$.

[*1 Punkt*]

Analog folgt für $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}(\pi - x)\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

**Bitte wenden!**

Damit gilt

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

[*1 Punkt (mit Folgefehler)*]

und wir erhalten die Fourierreihe von $g$:

$$g(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} + 4\cos(7x).$$

[*1 Punkt (mit Folgefehler)*]

**2. Fouriertransformation**

Mithilfe des Hinweises folgt

$$f(x) = (g * h)(x)$$

[*1 Punkt*]

und daher erhalten wir

$$\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\, \hat{h}(\xi)\,.$$

[*1 Punkt*]

Um die Fouriertransformation der Funktion $f$ zu berechnen, genügt es, die Fouriertransformation der Funktionen $g$ und $h$ zu bestimmen.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\xi)}\, dx \\
&= \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi}\bigg|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \\
&= \frac{2}{1+\xi^2}
\end{aligned}$$

[2 *Punkte: 1 Punkt für erstes Gleichheitszeichen, 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit Folgefehler, wenn erstes Gleichheitszeichen falsch ist)*] und

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{\xi}\,\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} \\ &= \frac{2}{\xi}\,\sin(\xi).\end{aligned}$$

[2 *Punkte: 1 Punkt für erstes Gleichheitszeichen, 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit Folgefehler, wenn erstes Gleichheitszeichen falsch ist)*]

Damit gilt

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4\sin(\xi)}{\xi(1+\xi^2)}.$$

[*1 Punkt (mit Folgefehler)*]

## 3. Wärmeleitungsgleichung

Wir lösen das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & \text{für } 0 < x < 1,\ t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) \ = 0, & \text{für } t \geq 0; \\ u(x,0) \ = \cos^4(2\pi x), & \text{für } 0 \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

mit dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$. Damit folgt

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

[*1 Punkt (wenn direkt $-\mu^2 < 0$ geschrieben wird, gibt es den Punkt nur, wenn noch kurz begründet wird, dass die anderen Fälle nicht relevant sind)*]

und somit

$$w(t) = Ce^{\lambda t},\ C \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

[*1 Punkt*]

und

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0, \tag{2}$$

wobei wir die Randbedingung $v'(0) = 0 = v'(1)$ haben. Der einzige interessante Fall ist, wenn $\lambda = -\mu^2 < 0$ ist, und in diesem Fall besitzt die Gleichung (2) Lösungen der Form

$$v(x) = C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Bitte wenden!**

[*1 Punkt*]

Wir berechnen die erste Ableitung von $v$

$$v'(x) = -\mu C_1 \sin(\mu x) + \mu C_2 \cos(\mu x).$$

Zudem folgt aus der Randbedingung, dass $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 = 0$ und $\mu = k\pi$ mit $k \in \{0, 1, 2...\}$. Ausserdem erhalten wir $\lambda_k = -k^2\pi^2$ sowie die Fundamentallösungen

$$v_k(x) = C_1 \cos(k\pi x)$$

[*1 Punkt*]

und

$$w_k(t) = Ce^{-k^2\pi^2 t}.$$

[*1 Punkt*]

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$ gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)\,.$$

Die Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\pi x) = \cos^4(2\pi x).$$

Wir erinnern uns an die Formel

$$\cos^2(\sigma) = \frac{1+\cos(2\sigma)}{2}$$

[*1 Punkt für Idee*]

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \cos^4(2\pi x) = \left(\frac{1+\cos(4\pi x)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x) + \frac{1}{4}\cos^2(4\pi x) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x) + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos(8\pi x)}{2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x) + \frac{1}{8}\cos(8\pi x) \end{aligned}$$

[*1 Punkt für richtiges Endresultat*]

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}e^{-16\pi^2 t}\cos(4\pi x) + \frac{1}{8}e^{-64\pi^2 t}\cos(8\pi x)\,.$$

[*1 Punkt*]

**4. Wellengleichung**

Wir betrachen die homogene Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0;$$

mit

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 10x - x^2, & \text{falls } 0 \le x \le 10; \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } 0 \le x \le 10; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds.$$

[*1 Punkt für Idee*]

**a)** Mit der Formel von d'Alembert folgt

$$\begin{aligned} u(2,2) &= \frac{1}{2}\left(f(4) + f(0)\right) + \frac{1}{2}\int_0^4 g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}(40-16) + 4 = 16 \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

und

$$\begin{aligned} u(10,1) &= \frac{1}{2}\left(f(11) + f(9)\right) + \frac{1}{2}\int_9^{11} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}(90-81) + \frac{1}{2}\int_9^{10} 2\,ds = \frac{11}{2}\,. \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

[*1 Punkt*]

**b)** Um die Lösung im Bereich $\{(x,t):\ x \geq t,\ t \geq 0\}$ zu bestimmen, benötigen wir folgende Fallunterscheidung:

i) Falls $x+t \geq x-t \geq 10$ gilt

$$u(x,t) = 0.$$

[*1 Punkt*]

ii) Falls $x+t \geq 10 \geq x-t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(0 + 10(x-t) - (x-t)^2\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{10} 2\,ds \\ &= (10-x+t)\left(\frac{x-t}{2}+1\right) \\ &= 4x - 4t + 10 + xt - \frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

[*2 Punkte: 1 Punkt für erstes Gleichheitszeichen, 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit Folgefehler, wenn erstes Gleichheitszeichen falsch ist)*]

iii) Falls $10 \geq x+t \geq x-t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(10(x+t) - (x+t)^2 + 10(x-t) - (x-t)^2\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 2\,ds \\ &= 6(x+t) + 4(x-t) - \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} \\ &= 10x + 2t - x^2 - t^2. \end{aligned}$$

[*2 Punkte: 1 Punkt für erstes Gleichheitszeichen, 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit Folgefehler, wenn erstes Gleichheitszeichen falsch ist)*]

## 5. Laplacetransformation

**a)** Um die inverse Laplacetransformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s + 13}{(s-1)((s+1)^2+4)}\,.$$

zu berechnen, verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+4}.$$

[*1 Punkt für richtigen Ansatz*]

**Siehe nächstes Blatt!**

Wir erhalten die Gleichung

$$2s^2 + s + 13 = (A+B)s^2 + (2A - B + C)s + (5A - C)$$

und damit das System

$$\begin{cases} A + B = 2; \\ 2A - B + C = 1; \\ 5A - C = 13\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen die Zahlen $A = 2$, $B = 0$ und $C = -3$ sind.

[*1 Punkt (mit Folgefehler von oben, wenn obiger Ansatz einigermassen Sinn macht) - erhalten dieselbe PBZ*]

Daher erhalten wir

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{3}{(s+1)^2 + 4}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)(t) - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right)(t) \\ &= 2e^t - \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t). \end{aligned}$$

[*2 Punkte: 1 Punkt für* $2e^t$, *1 Punkt für* $-\frac{3}{2}\sin(2t)$]

**b)** Wir Lösen das Anfangswertproblem

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 16e^t$$

zu den Anfangsdaten

$$y(0) = 2 \quad \text{und} \quad y'(0) = -1$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[*1 Punkt für Idee*]

Die transformierte Funktion $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ erfüllt die Gleichung

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 5Y(s) = \mathcal{L}\left(16e^t\right)(s) = \frac{16}{s-1}.$$

[*1 Punkt*]

Einsetzten der Anfangsdaten ergibt

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 2s - 3 + 2sY(s) + 5Y(s) &= \mathcal{L}\left(16e^t\right)(s) = \frac{16}{s-1} \\ (s^2 + 2s + 5)Y(s) &= 2s + 3 + \frac{16}{s-1} \\ ((s+1)^2 + 4)Y(s) &= 2s + 3 + \frac{16}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + s + 13}{(s-1)((s+1)^2+4)}\,, \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

[*1 Punkt*]

und mit Teilaufgabe a) folgt

$$y(t) = 2e^t - \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t).$$

[*1 Punkt*]

[*Gesamtpunktezahl: 36 Punkte*]