D-CHEM | Mathematik III | Sommer 2015
Prof. Dr. F. Da Lio

Lösung Prüfung Mathematik III

1. Wellengleichung

Um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 16u_{xx}(x,t) = e^x + 2\sin t & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{1}$$

zu lösen, betrachten wir

$$\alpha_{tt} - 16\alpha_{xx} = e^x \tag{2}$$

und

$$\beta_{tt} - 16\beta_{xx} = 2\sin t\,. \tag{3}$$

Eine besondere Lösung von (2) wird durch

$$\alpha(x,t) = \alpha(x) = \frac{-e^x}{16}$$

gegeben.

[*1 Punkt (zur Korrektorin/zum Korrektor:andere besondere Lösungen sind möglich: bitte überprüfen Sie aufmerksam.)*]

Eine besondere Lösung von (3) wird durch

$$\beta(x,t) = \beta(t) = -2\sin t$$

gegeben.

[*1 Punkt (zur Korrektorin/zum Korrektor:andere besondere Lösungen sind möglich: bitte überprüfen Sie aufmerksam.)*]

Daher folgt sofort, dass die Funktion $\bar{u}(x,t) := \alpha(x) + \beta(t) = \frac{-e^x}{16} - 2\sin t$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(x,t) - 16\bar{u}_{xx}(x,t) = e^x + 2\sin t & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \bar{u}(x,0) = \frac{-e^x}{16} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \bar{u}_t(x,0) = -2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

löst.

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Schliesslich betrachten wir das homogene Problem

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - 16 v_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ v(x,0) = -\bar{u}(x,0) = \frac{e^x}{16} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} - \bar{u}_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} + 2 & \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5}$$

[*1 Punkt*]

Die Lösung dieses Problems kann durch die d'Alembertsche Formel erhalten werden. `Zur Erinnerung`**:** sucht man die Lösung des homogenen Problems

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ w(x,0) = F(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ w_t(x,0) = G(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

dann wird die Lösung durch die d'Alembertsche Formel

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+ct) + F(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(y)\,dy$$

gegeben.

Weil in unserem Fall $c^2 = 16$ ist, gilt

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x+4t} + e^{x-4t}}{16}\right) + \frac{1}{8}\int_{x-4t}^{x+4t}\left(\frac{1}{1+y^2} + 2\right)\,dy$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{x+4t} + e^{x-4t}}{32} + \frac{1}{8}\left(\arctan(x+4t) - \arctan(x-4t)\right) + \frac{x+4t-x+4t}{4} \\ &= \frac{e^x}{32}(e^{4t} + e^{-4t}) + \frac{1}{8}\left(\arctan(x+4t) - \arctan(x-4t)\right) + 2t\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Wir schliessen, dass die Lösung von (1) durch

$$u(x,t) = v(x,t) + \bar{u}(x,t)$$

[*1 Punkt*]

gegeben wird, und somit erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{e^x}{32}(e^{4t} + e^{-4t}) + \frac{1}{8}\left(\arctan(x+4t) - \arctan(x-4t)\right) + 2t - \frac{e^x}{16} - 2\sin t\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

[*1 Punkt*]

2. Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen die Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, \pi),\ t > 0\,,$$

mit homogener Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0\,,$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x), \quad x \in [0,\pi]\,.$$

Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

[*1 Punkt*]

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K \in \mathbb{R}\,.$$

[*1 Punkt (wenn direkt $-\omega^2 < 0$ geschrieben wird, gibt es den Punkt nur, wenn noch kurz begründet wird, dass die anderen Fälle nicht relevant sind.)*]

Daher erhält man

$$T(t) = Ce^{Kt},\ C \in \mathbb{R}$$

[*1 Punkt*]

und

$$X''(x) - KX(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $X(0) = 0 = X(\pi)$.

Deswegen besitzt die vorherige Gleichung $X'' = KX$ nur für $K = -\omega^2 < 0$ nicht triviale Lösungen der Form,

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x),\ a, b \in \mathbb{R}\,.$$

[*1 Punkt*]

Zudem folgt aus der Randbedingung, dass $\omega = n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $a = 0$. Wir erhalten die Fundamental-Lösungen

$$X_n(x) = b_n \sin(nx)\,,$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

sowie

$$T_n(t) = Ce^{-n^2 t}\,.$$

[*1 Punkt*]

Damit ist der Ansatz für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}\,.$$

Die Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 5\sin(4x) + 7\sin(8x)\,.$$

[*1 Punkt*]

Deshalb verschwinden alle Koeffizienten b_n ausser $b_4 = 5$ und $b_8 = 7$. Die Lösung ist somit

$$u(x,t) = 5\sin(4x)e^{-16t} + 7\sin(8x)e^{-64t}\,.$$

[*1 Punkt*]

3. Fourierreihe

Weil wir die reelle Fourierreihe der ungeraden 2π-periodischen Fortsetzung von f berechnen wollen, müssen wir die folgenden Formeln mit $L = \pi$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(nx)$$

$$\gamma_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

[*1 Punkt*]

benutzen.

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}x\sin(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{-x\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right\} + \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{\pi}^{\pi/2} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(n\pi)}{n}\,.
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Deshalb erält man beziehungsweise

$$\gamma_{2k} = -\frac{1}{k\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

[*1 Punkt*]

$$\gamma_{4k+1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4k+1}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4k+1} + 1\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

[*1 Punkt*]

$$\gamma_{4k+3} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4k+3}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{-1}{4k+3} + 1\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

[*1 Punkt*]

und schliesslich

$$\begin{aligned}
f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} &\frac{-\sin(2kx)}{k\pi} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{4k+1}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4k+1} + 1\right)\sin((4k+1)x) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{4k+3}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{-1}{4k+3} + 1\right)\sin((4k+3)x)\,.
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

4. Laplacesche Gleichung

a) Die Funktion $u_1(x,y) - u_2(x,y)$ ist harmonisch in B_1 und erfüllt die Randbedingung $7 - 14|y|$. Mit dem Maximumsprinzip folgt

$$u_1(x,y) - u_2(x,y) \leq \max_{(x,y)\in B_1} (u_1(x,y) - u_2(x,y)) = \max_{(x,y)\in \partial B_1} (7 - 14|y|) = 7$$

[*1 Punkt*]

und

$$u_1(x,y) - u_2(x,y) \geq \min_{(x,y)\in B_1} (u_1(x,y) - u_2(x,y)) = \min_{(x,y)\in \partial B_1} (7 - 14|y|) = -7\,,$$

[*1 Punkt*]

d.h. es gilt

$$|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \leq 7\,.$$

[*1 Punkt*]

b) Die Funktion $-9u_1(x,y) + u_2(x,y)$ ist harmonisch und erfüllt die Randbedingung $-63 + 14|y|$. Mit der Poissonformel für den Ursprung folgt

$$-9u_1(0,0) + u_2(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -9u_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + u_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

[*1 Punkt*]

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -63 + 14|\sin\vartheta|\, d\vartheta$$
$$= -63 + \frac{28}{\pi}\,.$$

[*1+1 Punkte*]

5. Laplacetransformation

a) Um die inverse Laplacetransformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s^2+1)}$$

zu berechnen, verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs + C}{s^2+1}.$$

[*1 Punkt für richtigen Ansatz*]

Siehe nächstes Blatt!

Wir erhalten die Gleichung

$$s + 2 = (A + B)s^2 + (-B + C)s + (A - C)$$

und damit das System

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 1 \\ A - C = 2\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen die Zahlen $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$ und $C = -\frac{1}{2}$ sind.

[*1 Punkt*]

Daher erhalten wir

$$Y(s) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{3}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1}$$

und

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)(t) - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)(t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)(t) \\ &= \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\,, \end{aligned}$$

[*3 Punkte: 1 Punkt für* $\frac{3}{2}e^t$, *1 Punkt für* $-\frac{3}{2}\cos t$, *1 Punkt für* $-\frac{1}{2}\sin t$]

wobei wir $y(t) := \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t)$ gesetzt haben.

b) Wir lösen das Anfangswertproblem

$$-y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 3e^t - 5\cos t$$

zu den Anfangsdaten

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 1$$

mithilfe der Laplacetransformation.

Die transformierte Funktion $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} -s^2Y(s) + sy(0) + y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \mathcal{L}\left(3e^t - 5\cos t\right)(s) \\ &= \frac{3}{s-1} - \frac{5s}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

Einsetzten der Anfangsdaten ergibt

$$\begin{aligned}
-s^2Y(s)+1+sY(s)+2Y(s) &= \frac{3}{s-1}-\frac{5s}{s^2+1} \\
(-s^2+s+2)Y(s) &= \frac{3s^2+3-5s^2+5s}{(s-1)(s^2+1)}-1 \\
(-s^2+s+2)Y(s) &= \frac{-s^3-s^2+4s+4}{(s-1)(s^2+1)} \\
Y(s) &= \frac{s+2}{(s-1)(s^2+1)}\,,
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

und mit Teilaufgabe **a)** folgt

$$y(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\,.$$

[*1 Punkt*]

[*Gesamtpunktezahl: 36 Punkte*]