Lösungsvorschlag zur Klausur

1. Fourierreihen [*6 Punkte*]

Da die Fourierreihe von $\sin(x)$ bereits $\sin(x)$ ist, genügt es, die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von x^2 $(-\pi < x < \pi)$ zu bestimmen.

Sei nun also

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big]$$

die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von x^2 $(-\pi < x < \pi)$. Da die Funktion gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[*1 Punkt*]

Für a_0 gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

[*1 Punkt*]

Für $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{x^2\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[2x\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 2\frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx}_{=\frac{2\sin(nx)}{n^3}\big|_{x=-\pi}^{x=\pi}=0}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\frac{(-1)^n}{n^2} - 2(-\pi)\frac{(-1)^n}{n^2}\right] = 4\frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

[*3 Punkte*]

Damit lautet die in der Aufgabenstellung gesuchte Fourierreihe der Funktion f, der 2π-periodischen Fortsetzung von $x^2 - \sin(x)$:

Bitte wenden!

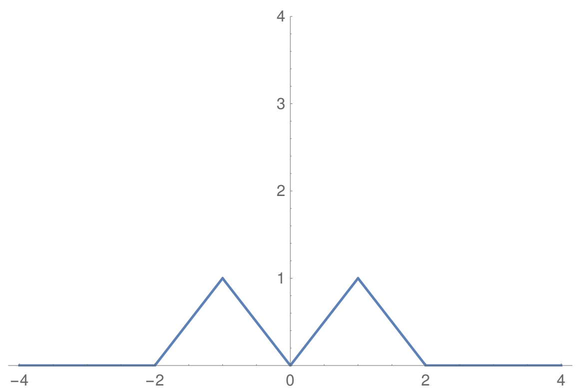
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - \sin(x).$$

[*1 Punkt*]

2. Fouriertransformation [*6 Punkte*]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \max\Big\{0, 1 - \big|1 - |x|\big|\Big\}$.

a) Der Graph von f sieht wie folgt aus:



[*1 Punkt*]

b) <u>**Lösung 1 - Direkte Rechnung:**</u>

Nach Definition der Fouriertransformation gilt:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-2}^{2} f(x)e^{-ix\xi}\, dx. \tag{1}$$

Für $\xi = 0$ ergibt sich

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 4\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 4\int_{0}^{1} x\, dx = 2.$$

[*1 Punkt für Fallunterscheidung und richtiges Ergebnis*]

Für $\xi \neq 0$ bestimmen wir das letzte Integral in (1) als Summe der Integrale

$$\int_{-2}^{2} = \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die vier Integrale berechnen wir nun einzeln:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} f(x)e^{-ix\xi}\,dx &= \int_{-2}^{-1}(2+x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= -\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}(2+x)\Big|_{x=-2}^{x=-1} + \int_{-2}^{-1}\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\,dx = -\frac{e^{i\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-i\xi x}}{i^2\xi^2}\Big|_{x=-2}^{x=-1} \\
&= -\frac{e^{i\xi}}{i\xi} + \frac{e^{i\xi}}{\xi^2} - \frac{e^{2i\xi}}{\xi^2}, \\
\int_{-1}^{0} f(x)e^{-ix\xi}\,dx &= \int_{-1}^{0}(-x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{0}^{1} xe^{ix\xi}\,dx \\
&= x\frac{e^{ix\xi}}{i\xi}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{i\xi}\,dx = \frac{e^{i\xi}}{i\xi} + \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{e^{i\xi}}{i\xi} + \frac{e^{i\xi}-1}{\xi^2} \\
\int_{0}^{1} f(x)e^{-ix\xi}\,dx &= \int_{0}^{1} xe^{-ix\xi}\,dx = -x\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\,dx \\
&= -\frac{e^{-i\xi}}{i\xi} + \frac{e^{-i\xi}-1}{\xi^2}, \\
\int_{1}^{2} f(x)e^{-ix\xi}\,dx &= \int_{1}^{2}(2-x)e^{-ix\xi}\,dx = -(2-x)\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\,dx \\
&= \frac{e^{-i\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-ix\xi}}{\xi^2}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{e^{-i\xi}}{i\xi} + \frac{e^{-i\xi}-e^{-2i\xi}}{\xi^2}.
\end{aligned}$$

[*3 Punkte, -1 Punkt pro Fehler*]

Addition dieser vier Terme ergibt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{-e^{2i\xi}+2e^{i\xi}-2+2e^{-i\xi}-e^{-2i\xi}}{\xi^2} \\
&= \frac{-2\cos(2\xi)+4\cos(\xi)-2}{\xi^2} = \frac{-2\cos^2(\xi)+2\sin^2(\xi)+4\cos(\xi)-2}{\xi^2} \\
&= \frac{-4\cos^2(\xi)+4\cos(\xi)}{\xi^2} = \frac{4\cos(\xi)\big(1-\cos(\xi)\big)}{\xi^2}
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Lösung 2 - Nicht ganz direkte Rechnung: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \max\{1-|x|, 0\}$. Dann ist f gegeben durch

$$f(x) = g(x+1) + g(x-1).$$

Die Fouriertransformierte von f ergibt sich aus der Fouriertransformierten von g durch

$$\hat{f}(\xi) = e^{i\xi}\hat{g}(\xi) + e^{-i\xi}\hat{g}(\xi) = 2\cos(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Somit bestimmen wir nun die Fouriertransformierte von g:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-ix\xi}\,dx\\ &= \int_0^1 (1-x)e^{-ix\xi}\,dx + \int_{-1}^{0}(1+x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_0^1 (1-x)\big(e^{-ix\xi}+e^{ix\xi}\big)\,dx\\ &= \int_0^1 2(1-x)\cos(x\xi)\,dx.\end{aligned}$$

Für $\xi = 0$ ergibt sich

$$\hat{g}(0) = \int_0^1 2(1-x)\,dx = 1$$

[*1 Punkt für Fallunterscheidung und richtiges Ergebnis*]

und für $\xi \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_0^1 2(1-x)\cos(x\xi)\,dx = \underbrace{2(1-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} - \int_0^1 (-2)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,dx\\ &= -\frac{2\cos(x\xi)}{\xi^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2-2\cos(\xi)}{\xi^2}.\end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

Insgesamt erhält man also:

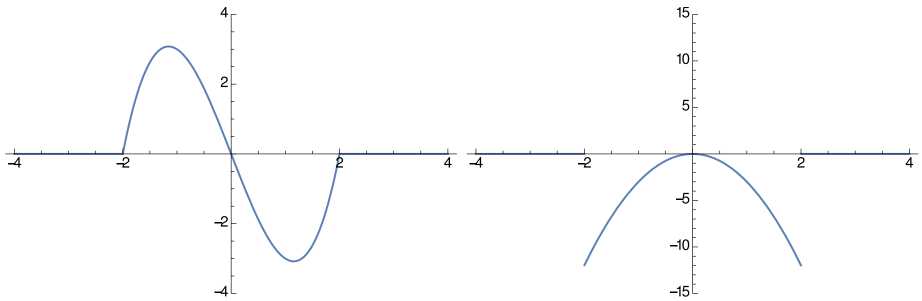
$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases}\frac{4\cos(\xi)}{\xi^2}\big(1-\cos(\xi)\big), & \xi \neq 0,\\ 2, & \xi = 0.\end{cases}$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

3. Wellengleichung [*8 Punkte*]

a) Die Graphen der Anfangsbedingungen sehen wie folgt aus:



(a) Graph von f (b) Graph von g

[*2 Punkte*]

b) Nach der d'Alembertschen Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy, \tag{2}$$

[*1 Punkt*]

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} -3x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

die Anfangsbedingungen sind. Mit (2) ergibt sich:

$$u(4,2) = \frac{f(6) + f(2)}{2} + \frac{1}{2}\int_2^6 g(s)\, ds = 0,$$

da $f(2) = 0 = f(6)$ und $g(s) = 0$ für $s > 2$.

[*1 Punkt*]

Mit (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(5,4) &= \frac{f(9) + f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int_1^9 g(s)\, ds \\ &= \frac{0 + (-3)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int_1^2 -3x^2\, dx + \int_2^9 0\, dx\right) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{-x^3}{2}\bigg|_{x=1}^{x=2} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

c) Mit der d'Alembertschen Formel (2) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(3)} \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \right).$$

Da $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ außerhalb von $[-2,2]$, gilt

$$\lim_{t\to\infty} f(x+t) = 0 \text{ und } \lim_{t\to\infty} f(x-t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = \int_{-2}^{2} g(y)\,dy.$$

[*2 Punkte*]

Damit ist also

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(-3y^2)\,dy = -\frac{y^3}{2}\Big|_{y=-2}^{y=2} = -8.$$

[*1 Punkt*]

4. Wärmeleitungsgleichung [*8 Punkte*]

Der Ansatz für nichttriviale Produktlösungen der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt auf

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 10\frac{X''(x)}{X(x)}$$

und dies impliziert die Bedingung, dass es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{ und } T'(t) = 10\lambda T(t).$$

[*1 Punkt für* λ]

Die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \text{ und } u(\frac{\pi}{2},t) = 0$$

liefern

$$X(0) = 0 \text{ und } X(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Um das Randwertproblem

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \quad \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ X(0) &= 0, \\ X(\frac{\pi}{2}) &= 0, \end{cases}$$

zu lösen, betrachten wir zunächst die Differentialgleichung

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

Siehe nächstes Blatt!

$\underline{\lambda > 0}$**:** In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Für solche eine Funktion gilt $X(0) = 0$ und $X(\frac{\pi}{2}) = 0$ genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B, \\ 0 &= e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}}A + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}}B. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt einzig und allein $A = B = 0$ als Lösung und es gibt somit keine nichttriviale Lösung X von (4) für $\lambda > 0$.

[*1 Punkt*]

$\underline{\lambda = 0}$**:** In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$X(x) = Ax + B.$$

Für solche eine Funktion gilt $X(0) = 0$ und $X(\frac{\pi}{2}) = 0$ genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} 0 &= B, \\ 0 &= \frac{\pi}{2}A + B. \end{aligned}$$

Folglich gibt es keine nichttriviale Lösung X von (4) für $\lambda = 0$.

[*1 Punkt*]

$\underline{\lambda < 0}$**:** In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$X(x) = A\cos\big(\sqrt{-\lambda}x\big) + B\sin\big(\sqrt{-\lambda}x\big).$$

Für solche eine Funktion gilt $X(0) = 0$ und $X(\frac{\pi}{2}) = 0$ genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} 0 &= A, \\ 0 &= A\cos\big(\frac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}\big) + B\sin\big(\frac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}\big). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann unterbestimmt, wenn

$$\sin\big(\frac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}\big) = 0$$

[*1 Punkt*]

ist. Dies gilt genau dann, wenn

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda} = n\pi,$$

also

$$\lambda = -4n^2$$

für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden!

Für X ergibt sich

$$X(x) = B\sin\big(2nx\big).$$

[*1 Punkt für die Produktlösungen*]

Für T ergibt sich somit die Differentialgleichung

$$T'(t) = -40n^2 T(t),\ t > 0.$$

Damit ist $T(t) = Ce^{-40n^2 t}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

[*1 Punkt für T*]

Überlagerung der gefundenen Produktlösungen liefert wieder eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - 10u_{xx} &= 0, \quad \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad \text{für } t > 0, \\ u(\frac{\pi}{2}, t) &= 0, \quad \text{für } t > 0, \end{cases}$$

Damit die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-40n^2 t} \sin\big(2nx\big)$$

eine Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$(5) \qquad \begin{cases} u_t - 10u_{xx} &= 0, & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0, \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0, \\ u(\frac{\pi}{2}, t) &= 0, & \text{für } t > 0, \\ u(x,0) &= \sin^3(4x), & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

ist, muss

$$\sin^3(4x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\big(2nx\big)$$

für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gelten.

[*1 Punkt für Anfangsbedingung*]

Es gilt nun aber:

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \sin(4x)\frac{1-\cos(8x)}{2} \\ &= +\frac{\sin(4x)}{2} + \frac{\sin(4x) - \sin(12x)}{4} \\ &= \frac{3}{4}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(12x) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ergibt sich als Lösung von (5):

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-160t}\sin(4x) - \frac{1}{4}e^{-1440t}\sin(12x).$$

[*1 Punkt für richtige Koeffizienten*]

5. Laplace-Transformation [*8 Punkte*]

a) Für eine Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz:

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 3s + 37}{(s+3)(s+4)(s-5)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s-5} + \frac{D}{(s-5)^2}$$

[*1 Punkt für Partialbruchzerlegung*]

Multiplikation mit $(s+3)(s+4)(s-5)^2$ liefert:

$$\begin{aligned} 2s^2 - 3s + 37 = {} & A(s+4)(s-5)^2 + B(s+3)(s-5)^2 \\ & + C(s+3)(s+4)(s-5) + D(s+3)(s+4). \end{aligned}$$

Mit $s = 5$ erhält man $72D = 72$, also $D = 1$. $s = -3$ liefert $64A = 64$, also $A = 1$. Einsetzen von $s = -4$ führt zu $-81B = 81$, also $B = -1$. Zur Bestimmung von C vergleichen wir die Ableitungen an der Stelle $s = 5$. Für diese ergibt sich:

$$17 = 17D + 72C,$$

also $C = 0$.

[*1 Punkt insgesamt für A, B, C, D richtig*]

Damit haben wir

$$\frac{2s^2 - 3s + 37}{(s+3)(s+4)(s-5)^2} = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} + \frac{1}{(s-5)^2} = \mathcal{L}\big(e^{-3t} - e^{-4t} + te^{5t}\big)(s).$$

Die inverse Laplacetransformierte von $\frac{2s^2-3s+37}{(s+3)(s+4)(s-5)^2}$ ist demnach die Funktion $e^{-3t} - e^{-4t} + te^{5t}$.

[*3 Punkte für die richtige inverse Laplacetransformierte, -1 pro Fehler*]

b) Für die Laplacetransformierte $x(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ der Lösung y von

$$\begin{cases} y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) &= 17e^{5t} + 72te^{5t}, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 2 \end{cases}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \big(s^2x(s) - s\underbrace{x(0)}_{=0} - \underbrace{x'(0)}_{=2}\big) + 7\big(sx(s) - \underbrace{x(0)}_{=0}\big) + 12x(s) &= \mathcal{L}\big(17e^{5t} + 72te^{5t}\big)(s) \\ &= \frac{17}{s-5} + \frac{72}{(s-5)^2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

Auflösen ergibt

$$(s^2+7s+12)x(s) = 2 + \frac{17}{s-5} + \frac{72}{(s-5)^2} = \frac{2s^2-3s+37}{(s-5)^2}.$$

Bemerkt man noch, dass $s^2+7s+12 = (s+3)(s+4)$, so ist

$$x(s) = \frac{2s^2-3s+37}{(s+3)(s+4)(s-5)^2}.$$

[*1 Punkt*]

Nach Aufgabenteil (a) ist somit $y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} + te^{5t}$.

[*1 Punkt*]

6. Harmonische Funktionen [*2 Punkte*]

Gemäß dem Maximumprinzip ist für alle $(x,y) \in B_1(0,0)$

$$u_1(x,y) - u_2(x,y) \geq \min_{(x,y)\in\partial B_1(0,0)} \big(g_1(x,y) - g_2(x,y)\big).$$

[*1 Punkt für korrektes und sinnvolles Maximumprinzip*]

Nun ist

$$g_1(x,y) - g_2(x,y) = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = (x-y)^4 \geq 0.$$

[*1 Punkt für den Nachweis, dass die Bedingungen erfüllt sind*]

Damit ist für alle $(x,y) \in B_1(0,0)$

$$u_1(x,y) - u_2(x,y) \geq 0.$$