First Draft

1. **a)** Der Wert $u(x,t)$ kann für (x,t) berechnet werden, wenn (x,t) im Einflussgebiet von $[-20,20]$ liegt (denn nur auf dem Intervall $[-20,20]$ sind sowohl f als auch g bekannt), d.h. wenn

$$-20 \leq x - ct \leq x + ct \leq 20$$

[1P für die Begründung]

bzw. (mit $c = 4$)

$$-20 \leq x - 4t \leq x + 4t \leq 20,$$

also für

$$4t - 20 \leq x \leq 20 - 4t.$$

[1P für die korrekte Antwort]

b) Laut der d'Alembertschen Formel ist

$$\begin{aligned} u(5,2) &= \frac{f(5+4\cdot 2) + f(5-4\cdot 2)}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\int_{5-4\cdot 2}^{5+4\cdot 2} g(s)\,ds \\ &= \frac{f(13)+f(-3)}{2} + \frac{1}{8}\int_{-3}^{13} s\,ds \\ &= \frac{1-13+1-3}{2} + \frac{1}{8}\frac{s^2}{2}\Big|_{s=-3}^{s=13} = -7 + 10 = 3 \end{aligned}$$

[1P für die d'Alembertsche Formel
2P für die Rechnung, -1P für jeden Fehler]

c) (*Bonus*) Wären f und g periodische Funktionen mit Periode 40, so folgte für die Lösung u des obigen Problems mit Hilfe der d'Alembertschen Formel:

$$\begin{aligned} u(x+40,t) &= \frac{f(x+40+ct) + f(x+40-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x+40-ct}^{x+40+ct} g(s)\,ds \\ &= \frac{\overbrace{f(x+ct+40)}^{=f(x+ct)} + \overbrace{f(x-ct+40)}^{=f(x-ct)}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \underbrace{g(s+40)}_{=g(s)}\,ds \\ &= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds = u(x,t) \end{aligned}$$

[1 Bonuspunkt für vollständige Begründung]

2. **a)** Da die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

eine gerade Funktion ist, tauchen in ihrer Fourierreihe keine Sinus-Terme auf (mit anderen Worten: $b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$)

[1P für die b_n, ob mit dieser Begründung oder Rechnung]

Für die Koeffizienten a_n gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{3}\pi^2$$

[1P für a_0]

sowie

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{x^2 \sin(nx)}{n} \bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{n} \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{2x}{n^2} \cos(nx) \bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n^2} \cos(nx)\, dx}_{= \frac{2}{\pi n^3} \sin(nx) \big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0} \\
&= \frac{4}{n^2} (-1)^n \text{ für alle } n \geq 1.
\end{aligned}$$

[2P. für a_n]

Somit erhalten wir als Fourierreihe:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

[1P für die Fourierreihe]

b) Da die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

eine stetige stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, konvergiert ihre Fourierreihe gemäß Theorem 3.3.1 aus der Vorlesung punktweise gegen ebendiese 2π-periodische Fortsetzung. Auswertung an der Stelle π liefert:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

[1P. für gute Wahl von x, z.B. $x = \pm\pi$ oder $x = 0$]

Umstellen der Gleichung führt zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\big(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\big) = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

[1P. für das Ergebnis]

3. **a)** Einsetzen des Produktansatzes $X(x)T(t)$ in die Gleichung $u_t - 4u_{xx} = 0$ führt zu

$$T'(t)X(x) - 4T(t)X''(x) + T(t)X(x) = 0$$

[1P für richtiges Einsetzen]

Da die Lösung $T(t)X(x)$ nicht gleich der Nullfunktion sein soll, gibt es Stellen, an denen Division durch $T(t)X(x)$ erlaubt ist. Dies führt dann zu

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 4\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da die linke Seite der Gleichung nur von t und die rechte nur von x abhängt, muss es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$\begin{cases} X''(x) &= \lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ T'(t) &= (4\lambda - 1)T(t), & t > 0. \end{cases}$$

[1P für das System]

b) Fordert man zusätzlich noch die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, so muss X das Randwertproblem

$$\begin{cases} X''(x) &= \lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ X(0) &= 0, & \\ X(\pi) &= 0, & . \end{cases}$$

lösen. Wir unterscheiden drei Fälle für λ:

- $\underline{\lambda > 0}$: In diesem Fall ist $\lambda = k^2$ für ein $k > 0$ und die allgemeine Lösung von $X'' = \lambda X$ lautet
$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$
Damit $X(0) = 0 = X(\pi)$, muss $A = B = 0$, also $X \equiv 0$ gelten. Dies führt nicht zu einer nichttrivialen Lösung.
- $\underline{\lambda = 0}$: In diesem Fall ist die allgemeine Lösung
$$X(x) = Ax + B.$$
Wiederum erfordern die Randbedingungen $X \equiv 0$. Auch in diesem Fall ist keine nichttriviale Lösung möglich.

[1P für den Ausschluss von $\lambda \geq 0$]
- $\underline{\lambda < 0}$: Dann ist es möglich λ als $-k^2$ mit $k > 0$ zu schreiben. Die allgemeine Lösung lautet
$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx).$$

[1P für die allgemeine Lösung im Fall $\lambda < 0$]

Die Randbedingung $X(0) = 0$ impliziert $A = 0$, während die Randbedingung $X(1) = 0$

$$B \sin(k\pi) = 0$$

[1P für $A = 0$ und die Bedingung $B \sin(k\pi) = 0$]

erfordert, was für $k \notin \mathbb{N}$ $B = 0$ impliziert, aber für $k \in \mathbb{N}$ für beliebiges $B \in \mathbb{R}$ gilt. Die zulässigen λ_n sind somit von der Form

$$\lambda_n = -n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

[1P für $\lambda_n = -n^2$]

c) Wir wissen bereits aus dem vorigen Aufgabenteil, dass $X_n(x) = B \sin(nx)$ lautet. Damit muss T_n die Gleichung

$$T_n'(t) = -(1 + 4n^2)T_n(t)$$

auf $(0, \infty)$ lösen, d.h. $T_n(t) = Ce^{-(1+4n^2)t}$. Die gesuchten Basislösungen lauten also:

$$e^{-(1+4n^2)t} \sin(nx)$$

[1P für X_n und 1P für T_n, multiplikative reelle Konstanten können getrost vernachlässigt werden]

d) Gemäß dem Superpositionsprinzip sind Linearkombinationen von Lösungen der Gleichung $u_t - 4u_{xx} = 0$ mit homogenen Randbedingungen wieder Lösungen der Gleichung mit homogenen Randbedingungen. Nun kann man sehen, dass die Basislösungen für $n = 2$ und $n = 4$ die Anfangsdaten $\sin(2x)$ und $\sin(4x)$ besitzen. Damit ist die gesuchte Lösung des Rand-Anfangswertproblems gerade

$$u(x, t) = e^{-17t} \sin(2x) + e^{-65t} \sin(4x)$$

[1P für das Superpositionsprinzip, 1P für die Lösung]

e) *(Bonus)* Für festes $x \in (0, \pi)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u(x,t) &= \lim_{t\to\infty} \left(e^{-17t} \sin(2x) + e^{-65t} \sin(4x) \right) \\
&= \sin(2x) \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-17t}}_{=0} + \sin(4x) \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-65t}}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

4. ***Fouriertransformation*** [5 Punkte]

1. Variante:

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

kann als der Wert der Fouriertransformierten der Funktion $xf(x)$ an der Stelle 0 interpretiert werden.

[1P für FT an der Stelle Null]

Bekanntlich ist

$$\widehat{xf(x)}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi).$$

[1P für FT von $xf(x)$]

Da $\hat{f}(\xi) = \frac{i\xi}{1+24\xi^2}$ gegeben ist, ergibt sich

$$i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{1+24\xi^2}\right) = -\frac{1\cdot(1+24\xi^2)-\xi\cdot 48\xi}{(1+24\xi^2)^2}.$$

[2P für korrektes Ableiten]

Auswertung an der Stelle $\xi = 0$ liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = -\frac{1\cdot(1+24\xi^2)-\xi\cdot 48\xi}{(1+24\xi^2)^2}\bigg|_{\xi=0} = -1.$$

[1P für Ergebnis]

2. Variante:

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Fouriertransformierte durch

$$\frac{1}{1+24\xi^2}$$

gegeben ist. Dann ist $f = g'$.

[1P für den Zusammenhang zwischen f und g]

g kann mithilfe einer Tabelle bestimmt werden. Es gilt nämlich, dass die Fouriertransformierte von $e^{-a|x|}$ durch $\frac{2a}{\xi^2+a^2}$ gegeben ist.

[1P für Fourierinversion]

Da

$$\frac{1}{1+24\xi^2} = \frac{1}{24}\frac{1}{\xi^2+\frac{1}{24}} = \frac{1}{2\sqrt{24}}\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}}{\xi^2+\frac{1}{24}}$$

ist, ist also

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{24}}e^{-\frac{|x|}{\sqrt{24}}}.$$

[1P für g]

Demnach ist

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{48}e^{-\frac{x}{\sqrt{24}}}, & x > 0, \\ \frac{1}{48}e^{\frac{x}{\sqrt{24}}}, & x < 0. \end{cases}$$

[1P für f]

und wir können das Integral $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$ berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx &= -2\int_0^\infty \frac{x}{48}e^{-\frac{x}{\sqrt{24}}}\,dx \\ &= \underbrace{\frac{x}{\sqrt{24}}e^{-\frac{x}{\sqrt{24}}}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{24}}e^{-\frac{x}{\sqrt{24}}}\,dx}_{=1} = -1. \end{aligned}$$

[1P für das Ergebnis]

5. ***Harmonische Funktionen*** [7 Punkte]

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \quad \text{in } B_R, \\ u &= f, \quad \text{auf } \partial B_R, \end{cases}$$

auf der Kreisscheibe B_R um $(0,0)$ mit Radius R in Polarkoordinaten durch

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\big)$$

gegeben ist, wenn f in Abhängigkeit von θ als

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\big)$$

dargestellt werden kann.

[1P für allgemeine Lösung bzw. die allgemeine Gestalt harmonischer Funktionen auf der Kreisscheibe]

Nun gilt in der vorliegenden Aufgabe:

$$f(\theta) = \big(\sqrt{10}\cos(\theta)\big)^4 + \big(\sqrt{10}\sin(\theta)\big)^4 = 100\cos^4(\theta) + 100\sin^4(\theta).$$

[1P für f in Abhängigkeit von θ]

Wir haben also nun die Fourierreihe von f zu bestimmen. Dazu verwenden wir die trigonometrischen Formeln

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \text{ und } \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

Damit ergibt sich für $\cos^4(\theta)$ und $\sin^4(\theta)$:

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) &= \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{8}, \\ \sin^4(\theta) &= \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{8}. \end{aligned}$$

Folglich ist also

$$f(\theta) = 100\big(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)\big) = 100\left(\frac{3}{4} + \frac{\cos(4\theta)}{4}\right) = 75 + 25\cos(4\theta).$$

Alternativ kann man ad hoc den obigen Ausdruck umschreiben:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 100\big(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)\big) = 100\big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\big)^2 - 200\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= 100 - 200\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 100 - 50\sin^2(2\theta) = 100 - 25(1 - \cos(4\theta)) \\ &= 75 + 25\cos(4\theta). \end{aligned}$$

[2P für die Fourierreihe]

Damit ist

$$u(r,\theta) = 75 + \frac{1}{4} r^4 \cos(4\theta).$$

Um u in Abhängigkeit von (x,y) darzustellen, schreiben wir mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - 6\sin^2(\theta)\cos^2(\theta).$$

Damit gilt an der Stelle $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$:

$$\begin{aligned} u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r,\theta) &= 75 + \frac{1}{4} r^4 \big(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - 6\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\big) \\ &= 75 + \frac{1}{4}\big(x^4 + y^4 - 6x^2y^2\big). \end{aligned}$$

Eine Probe zeigt, dass u eine harmonische Funktion ist und auf dem Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{10}$ mit der Funktion $x^4 + y^4$ übereinstimmt.

[1P für u]

b) Gemäß dem Maximumprinzip nimmt u das Maximum auf dem Rand an, d.h.

$$\max_{x^2+y^2\le 10} u(x,y) = \max_{x^2+y^2=10} u(x,y) = \max_{x^2+y^2=10} (x^4 + y^4).$$

[1P für Maximumprinzip]

Schreibt man dies in Polarkoordinaten (wie oben), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \max_{x^2+y^2=10} (x^4 + y^4) &= \max_{0\le\theta\le 2\pi} (75 - 25\cos(4\theta)) = 75 - 25 \min_{0\le\theta\le 2\pi} \cos(4\theta) \\ &= 75 + 25 = 100. \end{aligned}$$

Alternativ kann man den Term $x^4 + y^4$ für $x^2 + y^2 = 10$ auch als Funktion von $t = x^2$ mit $0 \le t \le 10$ betrachten. Dann lässt sich die zu maximierende Funktion als

$$t^2 + (10 - t)^2$$

schreiben, welche ihren maximalen Wert 100 an den Intervallrändern $t = 0$ und $t = 10$ annimmt.

[1P für korrekte Bestimmung des Maximalwerts]

6. ***Laplacetransformation*** [6 Punkte]

a) Bekanntlich ist die Funktion $\frac{1}{s-a}$ die Laplacetransformierte der Funktion e^{at}.

[1P für Berechnung dessen oder Zitat des Fakts]

Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}\big(e^{20t} - e^{16t}\big) = \frac{1}{s-20} - \frac{1}{s-16} = \frac{4}{(s-20)(s-16)}$$

[1P für die Rechnung]

b) Es gilt für die Laplacetransformierte der Ableitung einer Funktion:

$$\mathcal{L}(y')(s) = -y(0) + s\mathcal{L}(y)(s)$$

[1P für die Laplacetransformierte der Ableitung]

Wenn also $y'(t) - 20y(t) = 64e^{16t}$ auf $(0, \infty)$ mit $y(0) = 4$, dann muss für die Laplacetransformierte $\mathcal{L}(y)(s)$ gelten:

$$s\mathcal{L}(y)(s) - 4 - 20\mathcal{L}(y)(s) = \frac{64}{s-16},$$

was nach Umstellen

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{4s}{(s-16)(s-20)}$$

liefert.

[1P für die korrekte Laplacetransformierte]

Zur Bestimmung von y, also der Inversion der Laplacetransformation, gibt es mindestens zwei Wege:

<u>Variante 1:</u>

Mit dem Ansatz

$$\frac{4s}{(s-16)(s-20)} = \frac{A}{s-16} + \frac{B}{s-20} = \frac{(A+B)s - 20A - 16B}{(s-16)(s-20)}$$

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4s}{(s-16)(s-20)} = \frac{20}{s-20} - \frac{16}{s-16}.$$

Damit ist

$$y(t) = 20\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s-20}\Big)(t) - 16\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s-16}\Big)(t) = 20e^{20t} - 16e^{16t}.$$

<u>Variante 2:</u>

Bemerkt man, dass $\mathcal{L}(y)(s) = s\mathcal{L}(f)(s)$ (mit f aus der vorigen Aufgabe) ist und dass $f(0) = 0$ (nach Voraussetzung) ist, muss $y = f'$ sein, also

$$y(t) = 20e^{20t} - 16e^{16t}.$$

[2P für die korrekte Rücktransformation]