ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio

12. Februar 2018

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Maximalpunktzahl: 50 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[50]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 3 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(2,t) = 7 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{\sin(\pi x)}{2} - 4\sin(\pi x)\cos(\pi x), & x \in (0,2). \end{cases}$$

Lösung. Eine stationäre Lösung $v(x,t) = v(x)$ des Problems

$$\begin{cases} v_t - 5v_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}_+, \\ v(0,t) = 3 & t \in \mathbb{R}_+, \\ v(2,t) = 7 & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

is gegeben durch $v(x) = 2x + 3$. Wir betrachten jetzt die Differenz $w = u - v$, die das Problem

$$\begin{cases} w_t - 5w_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}_+, \\ w(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ w(2,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ w(x,0) = -\dfrac{\sin(\pi x)}{2} - 4\sin(\pi x)\cos(\pi x) & x \in (0,2), \end{cases}$$

löst. Wie bekannt (Separation der Variablen) ist die Lösung dieses Problem gegeben durch

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\frac{5n^2\pi^2 t}{4}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/2)$ die Fourier-Reihe der ungerade Fortsetzung von $w(x,0)$ ist. Mithilfe der trigonometrischen Formeln sehen wir, dass

$$w(x,0) = -\frac{\sin(\pi x)}{3} - 2\sin(2\pi x), \quad x \in (0,2).$$

somit ist

$$C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_4 = -2,$$

und $C_n = 0$ sonst. Daraus schliessen wir, dass die gesuchte Lösung ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t) \\ &= 2x + 3 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5\pi^2 t}\sin(\pi n x) - 2\mathrm{e}^{-20n^2\pi^2 t}\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $\alpha > 0$ bestimmt. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha(x) = \cosh(\alpha x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 1-periodischen Fortsetzung von f_α sowohl in komplexer als auch in reeller Form. Konvergiert die Reihe gegen die Funktion? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Mithilfe von (a) berechnen Sie die Summe der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2 + \alpha^2}.$$

Erinnerung: Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch:

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad \sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Lösung.

(a) Die 1-periodische Fortsetzung von f_α definiert eine stetige, C^1-stückweise Funktion, somit konvergiert punktweise ihre Fourier-Reihe zu dieser Fortsetzung.

Der n-ter komplexe Fourier-Koeffizient ist berechnet durch

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} \cosh(\alpha x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{(\alpha-2\pi i n)x} + \mathrm{e}^{-(\alpha+2\pi i n)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-2\pi i n)x}}{\alpha-2\pi i n} - \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+2\pi i n)x}}{\alpha+2\pi i n}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2} \\
&= (-1)^n \sinh(\alpha/2)\left(\frac{1}{\alpha-2\pi i n} + \frac{1}{\alpha+2\pi i n}\right) \\
&= (-1)^n \frac{2\alpha\sinh(\alpha/2)}{\alpha^2+4\pi^2 n^2},
\end{aligned}$$

somit sind die reellen Fourier Koeffizienten gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= c_0 = 2\sinh(\alpha/2), \\
a_n &= c_n + c_{-n} = (-1)^n \frac{4\alpha\sinh(\alpha/2)}{\alpha^2+4\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1, \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = 0.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe kann dann als

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\frac{2\alpha\sinh(\alpha/2)}{\alpha^2+4\pi^2n^2}\mathrm{e}^{2\pi inx}\quad\text{(complexe Form)},$$

$$2\sinh(\alpha/2)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4\alpha\sinh(\alpha/2)}{\alpha^2+4\pi^2n^2}\cos(2\pi x)\quad\text{(reelle Form)},$$

geschrieben werden.

(b) Wegen der punktweisen Konvergenz, setzen wir in der reellen Fourier-Darstellung von f_α, $x=\frac{1}{2}$ ein um zu erhalten

$$\cos(\alpha/2)=\frac{2\sinh(\alpha/2)}{\alpha}+4\alpha\sinh(\alpha/2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+4\pi^2n^2}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+4\pi^2n^2}=\frac{1}{4\alpha}\frac{\cosh(\alpha/2)}{\sinh(\alpha/2)}-\frac{1}{2\alpha^2}.$$

Aufgabe 3. Sei $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, und seien $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Problems

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u = \dfrac{1}{2} - y^2 - xy & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases}$$

und $v : B_1(0) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Problems

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_1(0), \\ v = \dfrac{9}{14} - xy & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(a) Betrachten Sie die Differenz $\delta = u - v$. Ohne u und v explizit zu berechnen,

- ☐ es gilt $\delta > 0$ in $B_1(0)$,
- ☐ es gilt $\delta < 0$ in $B_1(0)$,
- ☐ existieren zwei Punkte $p_0, p_1 \in B_1(0)$ so dass $\delta(p_0) > 0$ und $\delta(p_1) < 0$,
- ☐ man kann nicht sagen, welche der vorangegangenen Möglichkeiten gilt.

Begründen Sie ihre Auswahl.

(b) Bestimmen Sie explizit die funktion u Lösung von (I), sowohl in Polar- als auch in kartesischen Koordinaten.

Lösung.

(a) Die korrekte Wahl ist

- ☐ es gilt $\delta < 0$ in $B_1(0)$.

Tatsächlich weil u und v harmonisch sind, ist auch δ harmonisch, ausserdem gilt

$$\delta(x,y) = -\frac{1}{7} - y^2 < 0 \quad \text{auf } \partial B_1(0),$$

somit schliessen wir aus dem Mamimum-Prinzip, dass $\delta < 0$ in $B_1(0)$.

(b) In Polarkoordinaten und mithilfe elementaren trigonomestrischen Forlmen sehen wir, dass

$$\begin{aligned} u(1,\theta) &= \frac{1}{2} - \sin^2(\theta) - \cos\theta \sin\theta \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta) \quad \text{auf } \partial B_1(0), \end{aligned}$$

und mit diesem Ausdruck, bekanntlich kan die polar-Darstellung von u als

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}r^2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta) \quad \text{in } B_1(0)$$

geschrieben werden. Was die kartesische Form betrifft, aus den trigonometrischen Identitäten $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ und $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin\theta$ wir können schreiben

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{r^2}{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= \frac{r^2}{2}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 - 2\sin\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-y)^2 - 2y^2 \quad \text{in } B_1(0). \end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Für eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, wir nennen *Fourier-Original* von ϕ die eindeutige Funktion (falls sie existiert) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ so dass

$$\mathcal{F}[\Phi](\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation zeigt.

Sei jetzt $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion.

(a) Nehmen Sie an, dass die Funktion $g(\xi) = \xi\, \mathcal{F}[f](\xi)$ das Fourier-Original G besitzt. Finden Sie einen Ausdruck für G [in termini di] f.

(b) Nehmen Sie an, dass die Funktion $h(\xi) = \frac{\mathcal{F}[f](\xi)}{\xi}$ das Fourier-Original H besitzt. Finden Sie einen Ausdruck für H [in termini di] f und finden Sie explizit das Fourier-Original von

$$h(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-2|\xi|}}{\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: erinnern Sie sich an die Ableitungsregeln für die Fourier-Transformation.

Lösung.

(a) Weil $\mathcal{F}[G](\xi) = \xi\, \mathcal{F}[f](\xi)$ gilt, aus der Ableitungsregel $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\, \mathcal{F}[f](\xi)$ erhalten wir:

$$\mathcal{F}[G](\xi) = \frac{\mathcal{F}[f'](\xi)}{i}, \quad \text{also} \quad G(x) = \frac{f'(\xi)}{i}.$$

(b) Wir suchen H so dass

$$\mathcal{F}[H](\xi) = \frac{\mathcal{F}[f](\xi)}{\xi}, \quad \text{das heisst} \quad \xi\, \mathcal{F}[H](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi),$$

also mit der Ableitungsregel folgt, dass

$$\frac{\mathcal{F}[H']}{i}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi), \quad \text{also} \quad H'(x) = i\, f(x),$$

daraus folgt, aus dem Fundmentalsatz der Integralrechnung:

$$H(x) = i \int_{-\infty}^{x} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Explizit mit $h(\xi) = \frac{e^{-2|\xi|}}{\xi}$, aus den Tabellen wissen wir, dass

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + x^2}\right](\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$$

somit schliessen wir, dass das gesuchte Fourier-Original

$$H(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4 + y^2} \, dy = \frac{i}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

ist.

Aufgabe 5. Lösen Sie das folgende Problem *mithilfe der Laplace-Transformation*:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) + 2\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\theta)} y(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{2t} \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Hinweis: Erinneren Sie sich an den Faltungssatz für die Laplace-Transformation.

Lösung. Wir definieren $u(s) = \mathcal{L}[y](s)$ und wenden die Laplace-Transformation auf beide Seiten der Differentialgleichung. Mit folgenden Tatsachen:

- Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\theta)} y(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] = \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{2t} * y\right](s) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}](s)\mathcal{L}[y](s);$$

- Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''](s) &= s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0), \\ \mathcal{L}[y'](s) &= s\mathcal{L}[y](s) - y(0); \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$,

wird die Gleichung

$$s^2u(s) - 2 + u(s) + \frac{2}{s-2}u(s) = \frac{1}{s-2},$$

also:

$$u(s) = \frac{2s-3}{s(s-1)^2}.$$

Für eine PBZ machen wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{2s-3}{s(s-1)^2} &\overset{!}{=} \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \\ &= \frac{(A+B+C)s^2 + (-2A-B+C)s + A}{s(s-1)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ -2A - B + D = 2, \\ A = 3 \end{cases} \implies A = 3,\ B = -3,\ C = 5.$$

Somit können wir schreiben:

$$u(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2},$$

woraus mit einer Rücktransformation folgt es, dass die Lösung des Problems

$$y(t) = 3 - 3\mathrm{e}^t + 5t\mathrm{e}^t$$

ist.