Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio

27. August 2018

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und nicht auf die Aufgabeblätter. Lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Maximalpunktzahl: 50 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[50]	

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1. [10 Punkte] Entscheiden Sie, für jede der folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$,

- ob die Differentialgleichung linear oder nichtlinear ist und bestimmen Sie ihre Ordnung;
- im Fall einer linearen Differentialgleichung, ob sie homogen oder nicht homogen ist;
- im Fall einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, ob sie elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $u_{xxx} + u_{yyy} = 5x$,

(b) $2u_{xx} + 3(u^3 + u) = 0$,

(c) $u_x\, u_{yy} + 2u = 0$,

(d) $4u_{xx} + u_x + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$

(e) $(4 - x^2)u_{xx} - xy\, u_{xy} + (4 - y^2)u_{yy} = 1$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Lösung.

(a) Die DGl. ist linear, 3. Ordnung, nicht homogen; *[2 Punkte]*

(b) Die DGl. ist nicht linear, 2. Ordnung; *[2 Punkte]*

(c) Die DGl. ist nicht linear, 2. Ordnung; *[2 Punkte]*

(d) Die DGl. ist linear, 2. Ordnung, homogen. Da (Notation gemäss dem Skript, §1.6)

$$a = 4, b = 2, c = 3 \quad \Longrightarrow \quad \delta = -8 < 0,$$

ist die DGl. elliptisch. *[2 Punkte]*

(e) Die DGl. ist linear, 2. Ordnung, nicht homogen. Da

$$a = 4 - x^2, b = -\frac{xy}{2}, c = 4 - y^2,$$
$$\Longrightarrow \quad \delta = 4x^2 + 4y^2 - \frac{3}{4}x^2y^2 - 16 \leq 4 - 16 < 0 \quad \text{auf } \Omega,$$

ist die DGl. elliptisch. *[2 Punkte]*

Aufgabe 2. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie mithilfe der Formel von d'Alembert, den Wert im Punkt $(x,t) = (0,10)$ der Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - 25u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6x\mathrm{e}^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lösung. Gemäss der Formel von d'Alembert (mit $c = \sqrt{25} = 5$), ist u durch

$$u(x,y) = \frac{u(x-5t,0) + u(x+5t,0)}{2} + \frac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} u_t(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi$$

gegeben. *[4 Punkte]*

Weil

$$\frac{u(x-5t,0) + u(x+5t,0)}{2} = \frac{x-5t+x+5t}{2} = x,$$

und

$$\begin{aligned} \int_{x-5t}^{x+5t} u_t(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi &= 6\Big[(\xi-1)\mathrm{e}^{\xi}\Big]_{x-5t}^{x+5t} \\ &= 6\mathrm{e}^x\Big((x-1)(\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-5t}) + 5t(\mathrm{e}^{5t} + \mathrm{e}^{-5t})\Big) \\ &= 12\mathrm{e}^x\Big((x-1)\sinh(5t) + 5t\cosh(5t)\Big), \end{aligned}$$

[4 Punkte]

kann u als

$$u(x,t) = x + \frac{6}{5}\mathrm{e}^x\Big((x-1)\sinh(5t) + 5t\cosh(5t)\Big)$$

geschrieben werden. Daraus schliessen wir, dass der gesuchte Wert

$$u(0,10) = \frac{6}{5}\Big(-\sinh(50) + 50\cosh(50)\Big)$$

ist. *[2 Punkte]*

Aufgabe 3. [**10 Punkte**] Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie alle Schritte der Methode der Separation der Variablen beschreiben:

$$\begin{cases} u_t - 16u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2\sin^3(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die trigonometrische Identität:

$$\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin(3\alpha)) \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Der Separationsansatz lautet $u(x,t) = X(x)T(t)$, also wird die DGl.

$$u_t - 16u_{xx} = T'(t)X(x) - 16T(t)X''(x) = 0,$$

und, weil x und t unabhängige Variablen sind, können wir

$$\frac{T'(t)}{16T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ schreiben. *[3 Punkte]*

Bekanntlich gilt

$$T'(t) = c16T(t) \iff T(t) = b\mathrm{e}^{16ct},$$

$$X''(x) = X(x) \iff X(x) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{-c}x) + b\sin(\sqrt{-c}x) & \text{falls } c < 0, \\ ax + b & \text{falls } c = 0, \\ a\mathrm{e}^{\sqrt{c}x} + b\mathrm{e}^{\sqrt{c}x} & \text{falls } c > 0 \end{cases}$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Mit den Randbedingungen des Problems folgern wir, dass die passenden Werte

$$c = -\pi^2 n^2 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad a = 0, \qquad b \in \mathbb{R},$$

sind. *[3 Punkte]* Somit gilt

$$T(t) = T_n(t) = b_n \mathrm{e}^{-16\pi^2 n^2 t}, \quad X(x) = X_n(x) = b_n \sin(\pi n x).$$

Also folgern wir, dass die Lösung des betrachteten Problems für passende Konstanten $b_n \in \mathbb{R}$ als

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-16\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x)$$

dargestellt werden kann. *[2 Punkte]*

Um solche Konstanten zu bestimmen, bemerken wir, dass die Gleichung

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n x) \stackrel{!}{=} 2\sin^3(\pi x)$$

erfüllt werden muss, also (vgl. den Hinweis)

$$b_1 = 3/2, \quad b_3 = -1/2 \quad \text{und} \quad b_n = 0 \text{ für } n \neq 1, 3.$$

Schlussendlich ist die gesuchte Lösung als

$$u(x,t) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-16\pi^2 t} \sin(\pi n x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-16\pi^2 9t} \sin(3\pi x)$$

gegeben. *[2 Punkte]*

Aufgabe 4. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-9x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f.

(b) Mithilfe der Eigenschaften der Fourier-Transformation berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis für (b): benutzen Sie die Eigenschaft der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[x^k f](\xi) = i^k \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}[f]}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Lösung.

(a) Mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation erhalten wir, dass

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-9x^2}](\xi) = i\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-9x^2}]'(\xi),$$

[2 Punkte]

und

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-9x^2}](\xi) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\xi/3).$$

[2 Punkte]

Also, weil bekanntlich $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\xi) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}$ gilt, berechnen wir

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-9x^2}]'(\xi) = -\frac{\sqrt{\pi}}{54}\xi\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{36}},$$

somit folgern wir, dass

$$\mathcal{F}[f](\xi) = -i\frac{\sqrt{\pi}}{54}\xi\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{36}}.$$

[2 Punkte]

(b) Mit den Berechnungen in (a) folgern wir

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f](0) = 0,$$

[2 Punkte]

und

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x = i\mathcal{F}'[f](0) = i\left[-i\frac{\sqrt{\pi}}{54}\left(1 - \frac{\xi}{18}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{36}}\right]_{\xi=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{54}.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 5. [**10 Punkte**] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ der Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graph von f.

(b) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

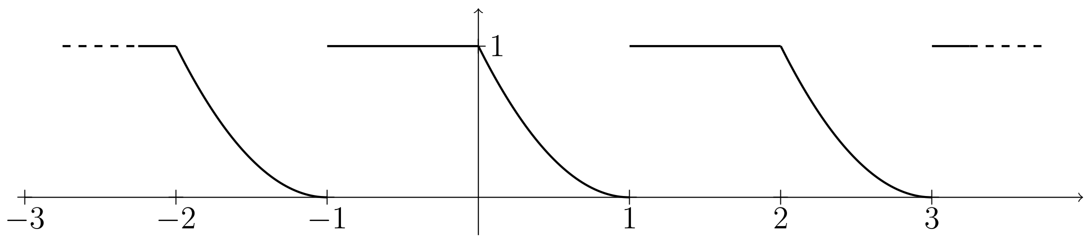
(c) Bestimmen Sie mithilfe von (b) den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Hinweis für (c): Werten Sie die Fourier-Reihe von f in einem geeigneten Punkt aus.

Lösung.

(a) Der Graph von f sieht wie folgt aus:



[1 Punkt]

(b) Weil f Periode 2 hat, ist ihre Fourier-Reihe gegeben durch

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi x) + b_n \sin(2\pi x),$$

wobei

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1,$$
$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Berechnung von a_0. Wir berechnen:

$$a_0 = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x + \int_0^1 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Berechnung von a_n, $n \geq 1$. Es gilt

$$a_n = \int_{-1}^{0} \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x-1)^2 \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x,$$

somit berechnen wir

$$\int_{-1}^{0} \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^{0} = 0,$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-1)^2 \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x &= \left[(x-1)^2 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (x-1)\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\Big[(x-1)\cos(\pi n x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1 - \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1\right) = \frac{2}{\pi^2 n^2},
\end{aligned}$$

also erhalten wir: $a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}$. *[3 Punkte]*

Berechnung von b_n, $n \geq 1$. Es gilt

$$b_n = \int_{-1}^{0} \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x-1)^2 \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x,$$

somit berechnen wir

$$\int_{-1}^{0} \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^{0} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n},$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-1)^2 \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x &= -\left[(x-1)^2 \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (x-1)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi n}\left(\left[(x-1)\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi^3 n^3}\Big[\cos(\pi n x)\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1),
\end{aligned}$$

also erhalten wir:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{2}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1).$$

[3 Punkte]

Die gesuchte Fourier-Reihe somit ist

$$S(f)(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) + \left(\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{2}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1) \right) \sin(\pi n x).$$

[1 Punkt]

(c) Die Funktion f ist stetig und stückweise differenzierbar in $(-1, 1)$, somit konvergiert ihre Fourier-Reihe punktweise gegen die Funktion: $f(x) = S(f)(x)$ für jedes $x \in (-1, 1)$.

Insbesondere gilt

$$f(0) = S(f)(0) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2},$$

daraus schliessen wir, dass der Wert der gesuchten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ist. *[2 Punkte]*