Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio & Dr. Cornelia Busch 5. Februar 2019

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie nicht auf die Aufgabenblätter. Lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung oder aus der Formelsammlung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[50]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. [10 Punkte] Seien

$$B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \quad \text{und} \quad \partial B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Koordinatenursprung und ihr Rand. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_3(0), \\ u(x,y) = 7 + 5xy + 2y^2 & \text{auf } \partial B_3(0). \end{cases}$$

Bemerkung. Falls Sie u in Polarkoordinaten berechnen, wird nicht verlangt, die Funktion wieder in kartesischen Koordinaten darzustellen.

Lösung.

Wie aus der Vorlesung bekannt, wenn wir u auf $\partial B_3(0)$ als Fourier-Reihe schreiben:

$$u(R,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi),$$

dann kann u in $B_3(0)$ in Polarkoordinaten als

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad \text{für } (r,\theta) \in [0,3] \times [0, 2\pi)$$

geschrieben werden. *[4 Punkte]*

In Polarkoordinaten $(x,y) = (3\cos\theta, 3\sin\theta)$ auf $\partial B_3(0)$, mithilfe der trigonometrischen Formeln

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

gilt

$$\begin{aligned} 7 + 5xy + 2y^2 &= 7 + 5 \cdot 9 \sin\theta\cos\theta + 2 \cdot 9 \sin^2\theta \\ &= 7 + 5 \cdot 9 \frac{\sin(2\theta)}{2} - 9(1 - \cos(2\theta)) \\ &= 16 + 5 \cdot \frac{9}{2} \sin(2\theta) - 9\cos(2\theta), \end{aligned}$$

somit ist die Lösung des Problems

$$u(r,\theta) = 16 + \frac{5}{2} r^2 \sin(2\theta) - r^2 \cos(2\theta) \quad \text{für } (r,\theta) \in [0,3] \times [0, 2\pi).$$

[6 Punkte]

(Bemerkung: in kartesischen Koordinatet lautet $u(x,y) = 16 + 5xy - x^2 + y^2$.)

Aufgabe 2. [**10 Punkte**] Mithilfe der Formel von d'Alembert, bestimmen Sie den Wert im Punkt $(x,t) = (1,1)$ der Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6x\mathrm{e}^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lösung.

Die Formel von d'Alembert lautet

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

wobei in unserem Fall $c = 3$, $f(x) = x$ und $g(x) = 6x\mathrm{e}^{-x^2}$ ist. *[4 Punkte]*

Das Integral lautet

$$\int_{x-3t}^{x+3t} \xi\mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \left[-\frac{e^{-\xi^2}}{2}\right]_{x-3t}^{x+3t} = \frac{\mathrm{e}^{-(x-3t)^2} - \mathrm{e}^{-(x+3t)^2}}{2} = \mathrm{e}^{-x^2-9t^2}\frac{\mathrm{e}^{6tx} - \mathrm{e}^{-6tx}}{2}$$
$$= \mathrm{e}^{-x^2-9t^2}\sinh(6tx),$$

[4 Punkte]

somit ist die Lösung des Problems

$$u(x,t) = x + \mathrm{e}^{-x^2-9t^2}\sinh(6tx).$$

Insbesondere erhalten wir, dass $u(1,1) = 1 + \mathrm{e}^{-10}\sinh(6)$. *[2 Punkte]*

Aufgabe 3. [10 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die π-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ der Funktion

$$x \mapsto x(\pi - x), x \in [0, \pi]$$

(a) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.

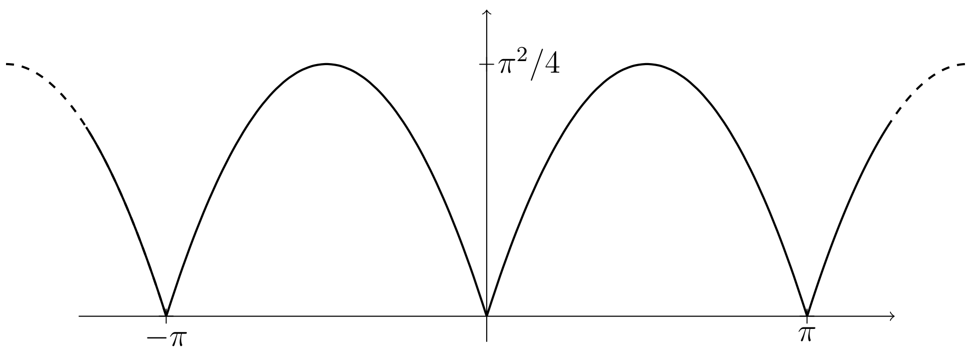
(b) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) Mithilfe von (b) bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Lösung.

(a) Der Graph von f ist wie folgt:



[1 Punkt]

(b) Weil f gerade ist, hat die Fourier-Reihe von f keine Sinus-Glieder. Somit ist

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx),$$

wobei

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) \, \mathrm{d}x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Wir berechnen:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Zunächst berechnen wir für $n \geq 1$

$$\int_0^\pi \pi x \cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\pi x \sin(2\pi x)}{2n} + \frac{\pi \cos(2nx)}{4n^2}\right]_0^\pi = 0,$$

und

$$\int_0^\pi x^2 \cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2 \sin(2nx)}{2n} + \frac{x\cos(2nx)}{2n^2} - \frac{\sin(2nx)}{4n^3}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2n^2},$$

somit schliessen wir, dass $a_n = -1/n^2 \; f\ddot{u}r$ jedes $n \geq 1$. Die Reihe ist also

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)\cos(2nx).$$

[7 Punkte]

(c) Weil f differenzierbar an der stelle $x = \pi/2$ ist, konvergiert $S(\pi/2)$ gegen $f(\pi/2)$ und weil $\cos(\pi n x) = (-1)^n$ folgern wir, dass

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 4. [10 Punkte] Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie alle Schritte der Methode der Separation der Variablen beschreiben:

$$\begin{cases} u_t - 25u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2\cos^3 x - 6\sin^2 x \cos x - 3, & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Hinweis: erinnern Sie sich an die trigonometrische Identität:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Der Separationsansatz lautet $u(x,t) = X(x)T(t)$, also wird die DGl.

$$u_t - 25u_{xx} = T'(t)X(x) - 25T(t)X''(x) = 0,$$

und, weil x und t unabhängige Variablen sind, können wir

$$\frac{T'(t)}{25T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ schreiben. *[3 Punkte]*

Bekanntlich gilt

$$T'(t) = c25T(t) \quad \Longleftrightarrow \quad T(t) = b\mathrm{e}^{25ct},$$

$$X''(x) = cX(x) \quad \Longleftrightarrow \quad X(x) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{-c}x) + b\sin(\sqrt{-c}x) & \text{falls } c < 0, \\ ax + b & \text{falls } c = 0, \\ a\mathrm{e}^{\sqrt{c}x} + b\mathrm{e}^{\sqrt{c}x} & \text{falls } c > 0 \end{cases}$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Mit den Randbedingungen des Problems folgern wir, dass die passenden Werte

$$c = -n^2 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b = 0,$$

sind. *[3 Punkte]*

Somit gilt

$$T(t) = T_n(t) = b_n\mathrm{e}^{-25n^2 t}, \quad X(x) = X_n(x) = a_n\cos(nx).$$

Also folgern wir, dass die Lösung des betrachteten Problems für passende Konstanten $a_n \in \mathbb{R}$ als

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-25n^2 t} \cos(nx)$$

dargestellt werden kann. *[2 Punkte]*

Um solche Konstanten zu bestimmen, bemerken wir, dass die Gleichung

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \overset{!}{=} 2\cos^3 x - 6\sin^2 x \cos x - 3$$

erfüllt werden muss, also (vgl. den Hinweis)

$$a_0 = -3, \quad a_3 = 2 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \neq 0, 3.$$

Schlussendlich ist die gesuchte Lösung als

$$u(x,t) = -3 + 2\mathrm{e}^{-25 \cdot 9t} \cos(3x).$$

gegeben. *[2 Punkte]*

Aufgabe 5. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-4(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f.

(b) Mithilfe der Eigenschaften der Fourier-Transformation berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Hinweis für (b): benutzen Sie die Eigenschaft der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[x^k f](\xi) = i^k \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}[f]}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Lösung.

(a) Aus der Eigenschaften der Fourier-Transformation folgen wir, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\xi) &= \mathcal{F}(x\mathrm{e}^{-4(x-1)^2})(\xi) \\
&= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-4(x-1)^2})(\xi) \\
&= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\mathrm{e}^{-i\xi}\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-4x^2})(\xi)\right);
\end{aligned}$$

andererseits wissen wir, dass $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-4x^2})(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{16}}$, somit ist

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{16}-i\xi}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{i\xi}{8}+1\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{16}-i\xi}.$$

[6 Punkte]

(b) Mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation gilt es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1+x) f(x)\, \mathrm{d}x &= \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}(f)(0) + i\mathcal{F}(f)'(0).
\end{aligned}$$

Aus (a) können wir berechnen:

$$\mathcal{F}(f)'(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{i}{8} + \left(1 - \frac{i\xi}{8}\right)\left(-\frac{\xi}{8} - i\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{16}-i\xi},$$

daraus schliessen wir, dass

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x) f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{9}{8} = \frac{17}{16}\sqrt{\pi}.$$

[4 Punkte]