Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Finde die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & -\pi < x < 0\,, \\ (x-\pi)^2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

und berechne den Wert der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Hinweis. Verwende geeignete Werte in der Fourierentwicklung von $f(x)$ um den Wert der Reihen zu berechnen.

[*8 Punkte*]

2. Berechne die Fouriertransformation von

$$f(x) = xe^{-|x|}\cos(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Hinweis. $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

[*8 Punkte*]

3. Finde die Lösung u von

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 2\sinh(x) & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) & = & x & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) & = & \sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right\}$$

[*6 Punkte*]

4. Finde die Lösung u von

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t - 12u_{xx} & = & 0 & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) & = & 0 & t \ge 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin^3(x) & x \in (0,\pi)\,. \end{array}\right\}$$

Hinweis. $\sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right)$

[*6 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion in $D = \{(x,y) : \; x^2 + y^2 < 36\}$, welche folgender Randbedingung genügt

$$u(x,y) = \begin{cases} x & x < 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{für} \quad (x,y) \in \partial D$$

a) Zeige $u(x,y) \leq \min\{x,0\}$ in D.

[*6 Punkte*]

b) Berechne $u(0,0)$.

[*2 Punkte*]

6. **a)** Finde die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{17 + 9s + s^2}{(s+1)(s^2+8s+16)} \quad \text{und} \quad G(s) = \frac{e^{-7s}}{(s+3)^3} \quad \text{für} \quad s \geq 0\,.$$

[*5 Punkte*]

b) Berechne die Lösung der folgenden DGl mithilfe der Laplacetransformation

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x &= e^{-t}\,, \\ x(0) = \dot{x}(0) &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

[*3 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]