D-CHAB | Mathematik III | August 2011
Dr. F. Da Lio

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0\,, \\ x & x > 0 \end{cases}$$

für $x \in (-\pi, \pi)$.

a) Berechne die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.

[*5 Punkte*]

b) Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

[*3 Punkte*]

2. Berechne die Fouriertransformation von

$$f(x) = \sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

[*6 Punkte*]

3. Finde die allgemeine Lösung von

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{ttx} - u_{xxx} & = & xt & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u_x(x,0) & = & 0 & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_{xt}(x,0) & = & \dfrac{1}{1+x} & x \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right\}$$

[*6 Punkte*]

4. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t - 17u_{xx} & = & 0 & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) & = & 0 & t \geq 0\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x) & x \in (0,\pi)\,. \end{array}\right\}$$

a) Finde die Lösung u für die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, \frac{\pi}{2})\,, \\ 2 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

[*6 Punkte*]

b) Zeige, dass für jede Anfangsbedingung $u_0(x)$ folgendes gilt:

$$W(t) = const., \quad \text{wobei} \quad W(t) = \int_0^{\pi} u(x,t)\,dx\,.$$

[*2 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $B_1(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ der Ball mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$. Weiter seien $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ Lösungen von

$$\left.\begin{array}{rcll} \Delta u_i & = & 0 & (x,y) \in B_1(0,0)\,, \\ u_i & = & g_i & (x,y) \in \partial B_1(0,0)\,, \end{array}\right\}$$

wobei $g_1(x,y) = 1$ und $g_2(x,y) = 2|x|$.

a) Zeige $|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \leq 1$.

[*5 Punkte*]

b) Berechne $u_1(0,0) - u_2(0,0)$.

[*3 Punkte*]

6. **a)** Berechne die Laplacetransformation von

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Hinweis. $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[*2 Punkte*]

b) Berechne die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + s^2 - 2s}\,.$$

[*2 Punkte*]

c) Berechne die Lösung von

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x & = & t\,, \\ x'(0) & = & 0\,, \\ x(0) & = & 1\,, \end{array}\right\}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[*4 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]