D-CHAB Mathematik III Februar 2012
Dr. F. Da Lio

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihe

Sei $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ für $x \in (-\pi, \pi)$.

a) Berechne die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.

[*4 Punkte*]

b) Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} .$$

[*4 Punkte*]

2. Fouriertransformation

Berechne die Fouriertransformation von

$$f(x) = x^2(1 - |x|)^+ \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Bem. Wir benutzen die Notation $g(x)^+ := \max\{g(x), 0\}$.

[*6 Punkte*]

3. Wellengleichung

Finde die Lösung u von

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x\sin(t) && x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

[*6 Punkte*]

4. Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - 3u_{xx} &= 0 && x \in (0,2)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(2,t) &= 0 && t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,2)\,. \end{aligned}$$

Finde die Lösung u für die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1)\,, \\ 2 - x & x \in [1,2). \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

[*8 Punkte*]

5. Laplacegleichung

Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck und sei $u(x,y)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (x,y) \in R\,, \\ u &= f \quad (x,y) \in \partial R\,. \end{aligned}$$

Bestimmen sie die Lösung u mit der Randbedingung

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y = 0 \\ x^2 & \text{falls} \quad y = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \,.$$

[*8 Punkte*]

6. Laplacetransformation

a) Berechne die Laplacetransformation von

$$f(t) = t \sin(2t)\,.$$

[*2 Punkte*]

b) Berechne die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 - 2}{s^4 + s^2}\,.$$

[*2 Punkte*]

c) Berechne die Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 4x &= 4t\,, \\ x'(0) &= 1\,, \\ x(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[*4 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]