D-CHAB Mathematik III August 2012
Dr. F. Da Lio

# Prüfung Mathematik III

**Allgemeine Hinweise:**

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

## Viel Erfolg!

**Bitte wenden!**

**1. Fourierreihe**

Berechnen sie die Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \in [0, \pi)\,, \\ 0 & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

[*8 Punkte*]

**2. Fouriertransformation**

Berechne sie die Fouriertransformation von

$$f(x) = x^2 e^{-2|x|} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

[*6 Punkte*]

**3. Wellengleichung**

Finde die Lösung $u$ von

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x(t+2)e^t & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0 & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= x & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

[*6 Punkte*]

**4. Wärmeleitungsgleichung**

Lösen sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= 0 & x \in (0,1)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 & t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= \cos^2(\pi x) - 1 & x \in (0,1)\,. \end{aligned}$$

[*8 Punkte*]

**Siehe nächstes Blatt!**

**5. Laplacegleichung**

Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ der Einheitsball. Bestimmen sie die Lösung $u(x,y)$ des Dirichlet Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (x,y) \in B\,, \\ u &= y^3 \quad (x,y) \in \partial B\,. \end{aligned}$$

Tipp: Benutzen sie die trigonometrische Formel

$$\sin(3\vartheta) = 3\sin(\vartheta) - 4\sin^3(\vartheta)\,.$$

[*6 Punkte*]

**6. Laplacetransformation**

**a)** Berechne die Laplacetransformation von

$$f(t) = e^{-t}(t^2 + 3t + 4)\,.$$

[*2 Punkte*]

**b)** Berechne die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{3s^2 + s + 1}{(s-2)(s^2+1)}\,.$$

[*2 Punkte*]

**c)** Berechne die Lösung von

$$\begin{aligned} y''(t) + y'(t) &= te^{-t}\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= -1\,, \end{aligned}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[*4 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 42 Punkte*]