Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihe

Berechnen sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{falls} \quad x \in (0, \pi)\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x \in (-\pi, 0)\,. \end{cases}$$

[*6 Punkte*]

2. Fouriertransformation

Die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

besitzt die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = -i\pi \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}}\,.$$

Berechnen sie

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

[*2 Punkte*]

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

[*4 Punkte*]

3. Wellengleichung

Finden sie die Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= x^2 \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= x^2 \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

[*6 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

4. Wärmeleitungsgleichung

Bestimmen sie die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\cos(x) && x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= x\cos(x) && x \in (0,\pi)\,,\\ u(0,t) &= 0 && t \geq 0\,,\\ u(\pi,t) &= -\pi && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

[*8 Punkte*]

5. Poissongleichung

Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ der Einheitsball. Finden sie die Lösung $u(x,y)$ des Dirichlet Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= x^4 + x^2 + 2x^2y^2 + y^2 + y^4 && (x,y) \in B\,,\\ u(x,y) &= 2xy && (x,y) \in \partial B\,. \end{aligned}$$

[*8 Punkte*]

6. Laplacetransformation

a) Berechnen sie die Laplacetransformation der Funktion

$$f(t) = (t^2 + 2)\cos(2t)\,.$$

[*3 Punkte*]

b) Berechnen sie die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{9 - 2s - s^2}{(s+1)(s^2+4)}\,.$$

[*3 Punkte*]

c) Bestimmen sie die Lösung $y(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) &= 0\,, t > 0\,,\\ y'(0) &= 2\,,\\ y(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[*4 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 44 Punkte*]