

# Prüfung Mathematik III

## Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

## Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

**Viel Erfolg!**

**Bitte wenden!**

### 1. Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihe der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in (0, \pi], \\ 1 & \text{falls } x \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

[6 Punkte]

### 2. Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = (1 - 3x)e^{-(2x-1)^2}.$$

[8 Punkte]

**Tipp:** Benutzen Sie

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4},$$

sowie die in der Vorlesung besprochenen Rechenregeln für die Fouriertransformation.

### 3. Wellengleichung

Finden Sie die Lösung  $u(x, t)$  der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x \cos(t/2) & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= 1 - x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 1 - x & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[6 Punkte]

### 4. Wärmeleitungsgleichung

Lösen Sie das folgende Problem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - 3u_{xx}(x, t) &= 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) &= 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 1 - \cos^4(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

mithilfe der Methode der Separation der Variablen.

[8 Punkte]

**Siehe nächstes Blatt!**

## 5. Laplacegleichung

Sei  $R := (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  das Einheits-Viereck. Bestimmen Sie die Lösungen  $u : R \rightarrow \mathbb{R}$  des Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0 && \text{in } R, \\ u(x, y) &= f(x, y) && \text{auf } \partial R.\end{aligned}$$

wobei

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y = 0 \\ \sin(2\pi x) & \text{falls } y = 1 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 2 \sin(\pi y) & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

[8 Punkte]

## 6. Laplacetransformation

a) Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{4s^2 + 5s - 11}{s^3 - 7s - 6}.$$

[4 Punkte]

**Tip:** Das Nennerpolynom hat die Wurzel  $s = -1$ .

b) Bestimmen Sie die Lösung  $y(t)$  der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) &= 2e^{3t}, & t > 0, \\ y'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0,\end{aligned}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

[4 Punkte]

[Gesamtpunktzahl: 44 Punkte]