Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = 1 - |x|, \qquad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

[*6 Punkte*]

2. Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = (2x-1)e^{-|2-3x|}.$$

[*8 Punkte*]

3. Wellengleichung

Wir betrachen das Anfangswertproblem (Problem von Cauchy)

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 4 - x^4 & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} |x| - 2 & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Die Welle erreicht den Punkt $x_0 = -4$ zum Zeitpunkt $t_0 = 2$. Genauer gilt

$$u(x_0, t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, t_0],$$

$$u(x_0, t) \neq 0 \text{ für alle } t \in (t_0, t_0 + 1).$$

Bestimmen Sie die die Wellengeschwindigkeit $c > 0$ und begründen Sie ihre Antwort.

[*3 Punkte*]

b) Bestimmen Sie $u(1,1)$ und $u(5,2)$.

Hinweis. Falls Sie die Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, können Sie diese Teilaufgabe unter der Annahme $c = 2$ lösen.

[*3 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

4. Wärmeleitungsgleichung

Lösen Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= 0 && x \in (-1,1)\,,\ t>0\,,\\ u(-1,t) = u(1,t) &= 0 && t \geq 0\,,\\ u(x,0) &= 1-x^2 && x \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

[*8 Punkte*]

5. Poissongleichung

Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ der Einheitsball. Finden Sie die Lösung $u(x,y)$ des Dirichlet Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 8(x^2+y^2)^3 && (x,y) \in B\,,\\ u(x,y) &= 1+y^3 && (x,y) \in \partial B\,, \end{aligned}$$

und geben Sie diese in kartesischen Koordinaten an.

Hinweis. $4\sin^3(\varphi) = 3\sin(\varphi) - \sin(3\varphi)$.

[*8 Punkte*]

6. Laplacetransformation

a) Berechnen Sie die Laplacetransformation der Funktion

$$f(t) = te^{1-t}\sin(2t)\,.$$

[*3 Punkte*]

b) Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation von

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+2s+5}\,.$$

[*3 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 42 Punkte*]