

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktezahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 DIN-A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Wellengleichung

Lösen Sie das Anfangswertproblem (Problem von Cauchy)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - 16u_{xx}(x, t) = e^x + 2 \sin t & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[8 Punkte]

2. Wärmeleitungsgleichung

Lösen Sie das folgende Problem

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 5 \sin(4x) + 7 \sin(8x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

[8 Punkte]

3. Fourierreihe

Berechnen Sie die reelle Fourierreihe der ungeraden 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

[6 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

4. Laplacesche Gleichung

Seien $B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $u_1, u_2 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der Dirichlet-Probleme

$$\begin{cases} \Delta u_1(x, y) = 0 & (x, y) \in B_1, \\ u_1(x, y) = 7 & (x, y) \in \partial B_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2(x, y) = 0 & (x, y) \in B_1, \\ u_2(x, y) = 14|y| & (x, y) \in \partial B_1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq 7$.

[3 Punkte]

b) Berechnen Sie $-9u_1(0, 0) + u_2(0, 0)$.

[3 Punkte]

5. Laplacetransformation

a) Berechnen Sie die *inverse* Laplace-Transformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{s + 2}{(s - 1)(s^2 + 1)}.$$

[5 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$, $t \geq 0$ der Differentialgleichung

$$-y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 3e^t - 5 \cos t$$

zu den Anfangsdaten

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 1.$$

[3 Punkte]

[Gesamtpunktzahl: 36 Punkte]