D-CHEM | Mathematik III | Februar 2016
Prof. Dr. F. Da Lio

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihen [*6 Punkte*]

Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2 - \sin(x).$$

[*6 Punkte*]

2. Fouriertransformation [*6 Punkte*]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \max\Big\{0, 1 - \big|1 - |x|\big|\Big\}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

[*1 Punkt*]

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f.

[*5 Punkte*]

3. Wellengleichung [*8 Punkte*]

Wir wollen das Anfangswertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & \begin{cases} x^3 - 4x, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) & = & \begin{cases} -3x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

betrachten.

a) Skizzieren Sie die Anfangsbedingungen. (Zwei Graphen!)

[*2 Punkte*]

b) Bestimmen Sie $u(4, 2)$ und $u(5, 4)$.

[*3 Punkte*]

c) Bestimmen Sie bei festem (aber beliebigem) $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t).$$

[*3 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

4. Wärmeleitungsgleichung [*8 Punkte*]

Lösen Sie das folgende Randwertproblem mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen:

$$\begin{cases} u_t - 10u_{xx} &= 0, & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0, \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t \geq 0, \\ u(\frac{\pi}{2}, t) &= 0, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) &= \sin^3(4x), & \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

[*8 Punkte*]

5. Laplace-Transformation [*8 Punkte*]

a) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 3s + 37}{(s+3)(s+4)(s-5)^2}$$

[*5 Punkte*]

b) Bestimmen Sie die Lösung y des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) &= 17e^{5t} + 72te^{5t}, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 2. \end{cases}$$

[*3 Punkte*]

6. Harmonische Funktionen [*2 Punkte*]

Es sei $B_1(0,0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$. Seien $u_1, u_2 : B_1(0,0) \to \mathbb{R}$ die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{cases} \Delta u_i(x,y) &= 0, & (x,y) \in B_1(0,0), \\ u_i(x,y) &= g_i(x,y), & (x,y) \in \partial B_1(0,0) \end{cases}$$

mit

$$g_1(x,y) = x^4 - 4xy^3 + y^4 \text{ und } g_2(x,y) = 4x^3y - 6x^2y^2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in B_1(0,0)$ gilt: $u_1(x,y) \geq u_2(x,y)$.

[*2 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 38 Punkte*]