Name:	Departement:
Vorname:	Legi-Nr.:

	1K	2K	Punkte	Bemerkungen:
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total				

D-CHEM Mathematik III 19. August 2016
Prof. Dr. F. Da Lio

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Es gibt Bonuspunkte ...
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie Ihre Resultate. (Markieren Sie es insbesondere, wenn Sie ein Resultat aus einer Formelsammlung übernehmen.)
- Sie dürfen auch eigenes Papier verwenden. Schreiben Sie in dem Fall auf **alle** zusätzlich abzugebenden Blätter Ihren Namen.
- Schreiben Sie mit einem blauen oder schwarzen Stift.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

1. ***Wellengleichung*** [5 Punkte, c) ist nur Bonus]

Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} &= 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei über die Funktionen f und g nur bekannt ist, dass

$$f(x) = 1 - |x| \text{ für } -40 \leq x \leq 40$$

und

$$g(x) = x \text{ für } -20 \leq x \leq 20.$$

a) Für welche Raumzeitpunkte (x,t) kann die Lösung $u(x,t)$ des obigen Anfangswertproblems aus diesen (unvollständigen) Daten bestimmt werden? 2 Punkte

b) Berechnen Sie $u(5,2)$. 3 Punkte

c) (*Bonusaufgabe, +1 Punkt*) Angenommen, die Anfangsbedingungen f und g wären periodisch mit Periode 40. Zeigen Sie, dass dann auch die Lösung $u(x,t)$ in x periodisch mit Periode 40 wäre.

2. ***Fourierreihen*** [7 Punkte]

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

5 Punkte

b) Bestimmen Sie durch Auswertung des obigen Ergebnisses an einem geeigneten Punkt den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2 Punkte

3. *Wärmeleitungsgleichung* [10 Punkte, e) ist nur Bonus]

Wir betrachten das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} + u = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(2x) + \sin(4x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

a) Für nicht identisch verschwindende Produktlösungen der Form $X(x)T(t)$ wird die Gleichung $u_t - 4u_{xx} = 0$ zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für T und X in Abhängigkeit von einem reellen Parameter λ.
Bestimmen Sie dieses System. 2 Punkte

b) Zieht man die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ zusätzlich in Betracht, sind nur noch spezielle Werte λ_n zulässig.
Welche Werte sind dies? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig. 4 Punkte

c) Welche Basislösungen in Produktform $X_n(x)T_n(t)$ ergeben sich für die obigen Werte λ_n? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig. 2 Punkte

d) Lösen Sie nun das Rand-Anfangswertproblem (1). 2 Punkte

e) *(Bonusaufgabe, +1 Punkt)* Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

für beliebiges (aber festes) $x \in (0,\pi)$.

4. *Fouriertransformation* [5 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion, deren Fouriertransformierte durch

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{i\xi}{1 + 24\xi^2}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Nützlich sein könnten:

- Fouriertransformation von f: $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$,
- Fouriertransformierte von f': $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$,
- Ableitung der Fouriertransformierten: $(\mathcal{F}(f))'(\xi) = \mathcal{F}(-ixf(x))(\xi)$.

5. ***Harmonische Funktionen*** [7 Punkte]

a) Finden Sie eine Funktion $u = u(x, y) : B \to \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{in } B, \\ u(x,y) &= x^4 + y^4, & \text{auf } \partial B, \end{cases}$$

wobei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 10\}$ die Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{10}$ sei.

Das Endergebnis sollte eine Funktion $u = u(x, y)$ sein, deren Auswertung bei Eingabe von kartesischen Koordinaten (x, y) elementar möglich ist. 5 Punkte

b) Was ist das Maximum von u auf dem Abschluss der Kreisscheibe B? 2 Punkte

6. ***Laplacetransformation*** [6 Punkte]

a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte der Funktion

$$f(t) = e^{20t} - e^{16t}.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) - 20y(t) &= 64e^{16t}, \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 4, \end{cases}$$

mithilfe der Laplacetransformation.