ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio

25. Januar 2017

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Maximalpunktzahl: 50 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[50]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. Berechnen Sie *mithilfe der Laplacetransformation* die Lösung $y(t)$ von

$$\begin{cases} y'' + y = t + 2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin(4t) + x & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2x^2 & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6\cos(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tipp: Finden Sie zuerst eine spezielle Lösung der Gleichung $u_{tt} - 4u_{xx} = \sin(4t) + x$.

Aufgabe 3. Sei $f(x) = x^2/2$ für $x \in [0,2]$.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe der geraden 4-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Berechnen Sie mithilfe von (a) den Grenzwert von

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^2}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie *mithilfe der Fouriertransformierten von $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$* den Grenzwert von

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{e}^{-2x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5.

(a) Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion in $B_2(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$, welche folgender Randbedingung genügt:

$$u(x,y) = 1 + x^2 \quad \text{für } (x,y) \in \partial B_2(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Zeigen Sie, dass $1 \leq u(x,y) \leq 5$ *ohne u explizit zu finden.*

(b) Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_2(0), \\ u(x,y) = 1 + x^2 & \text{auf } \partial B_2(0), \end{cases}$$

wobei $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. **Tipp:** Benutzen Sie Polarkoordinaten und die Methode der Separation der Variablen.