Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio

9. August 2017

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.

- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.

- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

- Maximalpunktzahl: 45 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[5]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[45]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. [5 Punkte] Seien a, b und g differenzierbare Funktionen mit $g > 0$.

Entscheiden Sie, ob die Folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ linear oder nichtlinear sind und bestimmen Sie die Ordnung; falls linear, entscheiden Sie, ob sie homogen oder nicht homogen sind. Im Fall einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entscheiden Sie, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $au_{xxx} + b(u^4 + u) = 0$

(b) $a^2u_{xx} + u_x u_y = 1$

(c) $4u_{xx} + u_x + u_{xy} + 6u_{yy} = 0$

(d) $(x^2 - 2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (y^2 - 2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 16\}$.

Aufgabe 2. [10 Punkte] Lösen Sie mit der Methode der Separation der Variablen das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 1 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \sin^2 x + \cos(3x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Aufgabe 3. [10 Punkte]

(a) Finden Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung:

$$w_{tt} - 4w_{xx} = \sin x + \mathrm{e}^t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

(b) Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + \mathrm{e}^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & t \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 4. [10 Punkte] Hier nennen wir $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixiert; betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

(a) Nehmen Sie für diese, *und nur für diese*, Teilaufgabe an, dass $\alpha = \frac{1}{\pi}$. Skizzieren Sie den Graph von f_α.

(b) Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Fourier-Reihe von f_α. Konvergieren diese Reihen gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Mithilfe der folgenden elementaren Identitäten:

$$\cosh(x) = \cos(ix), \qquad \sinh(x) = \frac{\sin(ix)}{i},$$

bestimmen Sie den Wert von:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Hinweis für (c): Betrachten Sie die reelle Fourier-Reihe von $f_\alpha(x)$ für geeignete $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1 - |x|^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, wobei:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation.

(a) Berechnen Sie f' (welche ausserhalb der Punkte -1 und 1 definiert ist) und zeichnen Sie die Graphen von f und f'.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f')$.

(c) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f)$ *mithilfe von* (b).