Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Francesca Da Lio

27. August 2018

# Mathematik III
# Prüfung
## D-CHEM

---

**Name:**
**Legi-Nr.:**
**Studiengang:**

---

**Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.**

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und nicht auf die Aufgabeblätter. Lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.

- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.

- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

- Maximalpunktzahl: 50 Punkte.

**Tabelle nicht ausfüllen!**

| Aufg. | Punkte | Kontrolle |
|---|---|---|
| 1 | [10] | |
| 2 | [10] | |
| 3 | [10] | |
| 4 | [10] | |
| 5 | [10] | |
| Total | [50] | |
| Vollständigkeit | | |
| Note | | |

**Aufgabe 1. [10 Punkte]** Entscheiden Sie, für jede der folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$,

- ob die Differentialgleichung linear oder nichtlinear ist und bestimmen Sie ihre Ordnung;
- im Fall einer linearen Differentialgleichung, ob sie homogen oder nicht homogen ist;
- im Fall einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, ob sie elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $u_{xxx} + u_{yyy} = 5x$,

(b) $2u_{xx} + 3(u^3 + u) = 0$,

(c) $u_x\, u_{yy} + 2u = 0$,

(d) $4u_{xx} + u_x + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$

(e) $(4 - x^2)u_{xx} - xy\, u_{xy} + (4 - y^2)u_{yy} = 1$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

**Aufgabe 2. [10 Punkte]** Bestimmen Sie mithilfe der Formel von d'Alembert, den Wert im Punkt $(x, t) = (0, 10)$ der Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - 25u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6x\mathrm{e}^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Aufgabe 3. [10 Punkte]** Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie alle Schritte der Methode der Separation der Variablen beschreiben:

$$\begin{cases} u_t - 16u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2\sin^3(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die trigonometrische Identität:

$$\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin(3\alpha)) \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 4. [10 Punkte]** Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-9x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f$.

**(b)** Mithilfe der Eigenschaften der Fourier-Transformation berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Hinweis für (b):* benutzen Sie die Eigenschaft der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[x^k f](\xi) = i^k \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}[f]}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Aufgabe 5. [10 Punkte]** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ der Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**(a)** Skizzieren Sie den Graph von $f$.

**(b)** Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f$.

**(c)** Bestimmen Sie mithilfe von (b) den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Hinweis für (c):* Werten Sie die Fourier-Reihe von $f$ in einem geeigneten Punkt aus.