Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio & Dr. Cornelia Busch 5. Februar 2019

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie nicht auf die Aufgabenblätter. Lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung oder aus der Formelsammlung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[50]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. [10 Punkte] Seien

$$B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \quad \text{und} \quad \partial B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Koordinatenursprung und ihr Rand. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_3(0), \\ u(x,y) = 7 + 5xy + 2y^2 & \text{auf } \partial B_3(0). \end{cases}$$

Bemerkung. Falls Sie u in Polarkoordinaten berechnen, wird nicht verlangt, die Funktion wieder in kartesischen Koordinaten darzustellen.

Aufgabe 2. [10 Punkte] Mithilfe der Formel von d'Alembert, bestimmen Sie den Wert im Punkt $(x,t) = (1,1)$ der Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6x\mathrm{e}^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 3. [10 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die π-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ der Funktion

$$x \mapsto x(\pi - x), x \in [0, \pi]$$

(a) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.

(b) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) Mithilfe von (b) bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Aufgabe 4. [10 Punkte] Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie alle Schritte der Methode der Separation der Variablen beschreiben:

$$\begin{cases} u_t - 25u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2\cos^3 x - 6\sin^2 x \cos x - 3, & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Hinweis: erinnern Sie sich an die trigonometrische Identität:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-4(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f.

(b) Mithilfe der Eigenschaften der Fourier-Transformation berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis für (b): benutzen Sie die Eigenschaft der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[x^k f](\xi) = i^k \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}[f]}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi), \quad k = 1,2,3,\ldots$$