Lineare Algebra I/II
D-MATH, HS 14/FS 15

Prof. Richard Pink

Basisprüfung

18. August 2015

1. [*6 Punkte*] Betrachte den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt, und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) [*4 Punkte*] Finde eine Orthonormalbasis des Unterraums $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(b) [*2 Punkte*] Finde eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Lösung: (a) Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 16 & -1 & 7 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 36 - 49 + 6 \cdot 16 - 21 - 14 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 0$$

sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Die Vektoren v_2, v_3 sind keine Vielfachen voneinander, also linear unabhängig und somit eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren v_2, v_3 an:

$$\widetilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_3 &= \frac{v_3 - \langle v_3, \widetilde{v}_2 \rangle \widetilde{v}_2}{\|v_3 - \langle v_3, \widetilde{v}_2 \rangle \widetilde{v}_2\|} = \frac{v_3 - \frac{1}{6}\langle v_3, v_2 \rangle v_2}{\|v_3 - \frac{1}{6}\langle v_3, v_2 \rangle v_2\|} = \frac{v_3 + 2v_2}{\|v_3 + 2v_2\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Unterraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ besitzt somit die Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Da v_2, v_3 eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ist, gilt

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle^\perp = \{v_2, v_3\}^\perp = \mathrm{Kern}((v_2, v_3)^T) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Unterraum $\langle v_1, v_2, v_3\rangle^\perp$ besitzt die Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. [*5 Punkte*] Sei V der Vektorraum aller reellen Polynome in der Variable x vom Grad $\leq n$. Betrachte die lineare Abbildung

$$\Phi\colon V \to V,\ u(x) \mapsto \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \big((x+1)^2 \cdot u(x)\big).$$

(a) [*3 Punkte*] Bestimme die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$.

(b) [*2 Punkte*] Existiert eine Basis aus Eigenvektoren von Φ?

Lösung: (a) Für alle $i = 0, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(x^i) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \big((x+1)^2 x^i\big) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \big(x^{i+2} + 2x^{i+1} + x^i\big) \\
&= \begin{cases} (i+2)(i+1)x^i + 2(i+1)ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} & \text{falls } i \geq 2 \\ (i+2)(i+1)x^i + 2(i+1)ix^{i-1} & \text{falls } i = 1 \\ (i+2)(i+1)x^i & \text{falls} \end{cases} \\
&= (i+2)(i+1) \cdot x^i + 2(i+1)i \cdot x^{i-1}\delta_{i\geq 1} + i(i-1) \cdot x^{i-2}\delta_{i \geq 2},
\end{aligned}$$

wobei wir für $k = 1, 2$ die Notation

$$x^{i-k}\delta_{i\geq k} := \begin{cases} x^{i-k} & \text{falls } i \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwenden. Die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ ist also $(a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} (i+2)(i+1) & \text{falls } i = j \\ 2(i+1)i & \text{falls } i = j-1 \\ i(i-1) & \text{falls } i = j-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $(i+2)(i+1)$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Das charakteristische Polynom von Φ ist also gleich

$$\mathrm{char}_\Phi(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - (i+2)(i+1)).$$

Da dieses Polynom in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Faktoren besitzt, ist Φ diagonalisierbar. Also existiert eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.

Aliter: Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\Phi((x+1)^i) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \big((x+1)^{i+2}\big) = (i+2)(i+1)(x+1)^i,$$

das Polynom $(x+1)^i$ ist also ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert $(i+1)(i+1)$. Für jedes i ist $(x+1)^i$ ein normiertes Polynom von Grad i. Folglich bilden die Vektoren $(x+1)^0, \ldots, (x+1)^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.

3. [*5 Punkte*] Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) [*2 Punkte*] Finde über $\mathbb{Q}$ eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L und eine Matrix U in Zeilenstufenform mit $A = L \cdot U$.

(b) [*3 Punkte*] Für welche Primzahlen p existiert eine solche Zerlegung über $\mathbb{F}_p$?

Lösung: (a) Wir machen den Ansatz

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}$$

für reelle Koeffizienten a, b, c, d, e, f mit $a, c \neq 0$. Wir rechnen

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} a & ad & ae \\ b & bd + c & be + cf \end{pmatrix}.$$

Durch sukzessives Auflösen der Gleichung $A = L \cdot U$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 3 \\ d &= 3/a = 3/2 \\ e &= -3/a = -3/2 \\ c &= 5 - bd = 1/2 \\ f &= (-2 - be)/c = 5, \end{aligned}$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aliter: Addieren von $-3/2$ der ersten Zeile zur zweiten bringt die Matrix A in die Zeilenstufenform

$$U := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Diese Zeilenoperation wird bewirkt durch Linksmultiplikation mit der invertierbaren Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $L := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ deren Inverse. Dann haben wir $L^{-1} \cdot A = U$ und somit $A = LU$.

(b) Für jede ungerade Primzahl p ergeben die obigen Formeln für L und U auch einen Sinn über dem Körper $\mathbb{F}_p$, und die Gleichung $A = LU$ gilt ebenfalls über $\mathbb{F}_p$. Ausserdem sind die Diagonaleinträge von L auch ungleich Null in $\mathbb{F}_p$. Also existiert die gesuchte Zerlegung über $\mathbb{F}_p$.

Betrachte nun $p = 2$. Über $\mathbb{F}_2$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Angenommen über $\mathbb{F}_2$ existiert eine Zerlegung $A = L \cdot U$ für eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L und eine Matrix U in Zeilenstufenform. Dann ist

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & * \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U = \begin{pmatrix} c & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

für gewisse $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ mit $a \neq 0$. Folglich gilt

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & * & * \\ bc & * & * \end{pmatrix}.$$

Da der linke obere Eintrag ac von A gleich 0 ist, aber $a \neq 0$ ist, muss $c = 0$ sein. Dann ist aber auch der linke untere Eintrag bc von A gleich 0, was einen Widerspruch ergibt. Also existiert keine solche Zerlegung über $\mathbb{F}_2$.

Fazit: Eine solche Zerlegung existiert über $\mathbb{F}_p$ genau dann, wenn $p \neq 2$ ist.

4. [*11 Punkte*] Betrachte die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) [*1 Punkt*] Berechne das charakteristische Polynom von A.

(b) [*2 Punkte*] Bestimme die Jordansche Normalform von A.

(c) [*2 Punkte*] Berechne $\mathrm{Spur}(A^n)$ für alle $n \geq 0$.

(d) [*3 Punkte*] Bestimme eine Jordanbasis von A.

(e) [*3 Punkte*] Finde den rechten oberen Eintrag von A^n für alle $n \geq 0$.

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_A(X) &= (X+1)(X-3)(X-2) + 6 + 5 + 2(X-3) - 3(X+1) + 5(X-2) \\ &= X^3 - 4X^2 + 5X - 2 \\ &= (X-1)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (X-1)^2(X-2)\,. \end{aligned}$$

(b) Da $(X-2)$ in $\mathrm{char}_A(X)$ als linearer Faktor auftaucht, besitzt A genau einen Jordanblock der Grösse 1 zum Eigenwert 2. Wegen

$$\mathrm{Rang}(A - I_3) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

gilt $\dim \mathrm{Eig}_1(A) = 3 - \mathrm{Rang}(A - I_3) = 1$. Also besitzt A einen Jordanblock der Grösse 2 zum Eigenwert 1. Ingesamt ist somit die Jordansche Normalform von A gleich

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrix A ist ähnlich zu ihrer Jordanschen Normalform. Also existiert eine invertierbare Matrix U mit $A = UJU^{-1}$. Für alle $n \geq 0$ gilt dann $A^n = UJ^nU^{-1}$. Da die Spur invariant unter Ähnlichkeit ist, folgt

$$\mathrm{Spur}(A^n) = \mathrm{Spur}(J^n) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\right) = 2^n + 2\,.$$

(d) Wir finden eine Jordanbasis zu A. Wir haben

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $v \in \mathrm{Kern}((A - I_3)^2) \setminus \mathrm{Kern}(A - I_3)$ ein beliebiger Vektor, zum Beispiel sei $v := (1, -3, 0)^T$. Dann ist

$$(Av, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A zum Hauptraum $\mathrm{Hau}_1(A)$. Weiter gilt

$$\mathrm{Eig}_2(A) = \mathrm{Kern}(A - 2I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A.

(e) Mit

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt dann $A = UJU^{-1}$ und $A^n = UJ^nU^{-1}$. Wegen

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & -n-1 \\ * & * & -1 \\ * & * & 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * & -n-2+2\cdot 2^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist der rechte obere Eintrag von A^n gleich $2^{n+1} - n - 2$.

Aliter: Wie wir in (b) gesehen haben, existiert eine reelle invertierbare Matrix U mit $A^n = U \cdot J^n \cdot U^{-1}$. Wegen

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

existieren somit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \geq 0$ der rechte obere Eintrag in A^n gleich

$$a2^n + bn + c$$

ist. Wegen

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & * & 4 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

erhalten wir durch Einsetzen der Zahlen $n = 0, 1, 2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \qquad && (n = 0) \\ 2a + b + c &= 1 \qquad && (n = 1) \\ 4a + 2b + c &= 4 \qquad && (n = 2), \end{aligned}$$

woraus durch direktes Lösen $a = 2$ and $b = -1$ und $c = -2$ folgt. Der rechte obere Eintrag von A^n ist also gleich $2 \cdot 2^n - n - 2$.

5. [*7 Punkte*] Für alle $n \geq 1$ berechne die Determinante der rationalen Matrix $A_n := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ i \cdot j & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Lösung: Subtrahieren wir in A_n die erste Spalte zweimal von der zweiten Spalte, dreimal von der dritten, und so weiter, bis schliesslich n-mal von der n-ten Spalte, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -9 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & -n^2 \end{pmatrix}$$

Addieren wir nun zu der ersten Spalte $1/2$-mal die zweite Spalte, $1/3$-mal die dritte Spalte, und so weiter, bis schliesslich $1/n$-mal die n-te Spalte, so erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$(n-1), -4, -9, \ldots, -n^2.$$

Also ist

$$\det A_n = (n-1) \cdot \prod_{i=2}^{n} (-i^2) = (-1)^{n-1}(n-1)(n!)^2 \,.$$

Lösung 2: Dividieren wir für jedes $i = 1, \ldots, n$ die i-Zeile durch i, und für jedes $j = 1, \ldots, n$ die j-Zeile durch j, so erhalten wir die Matrix

$$B_n := \big(1 - \delta_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} = -I_n + vv^T$$

mit $v := (1, \ldots, 1)^T$. Die Matrix $v \cdot v^T$ hat Rang 1 und somit den Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit $n-1$, und wegen

$$(v \cdot v^T) \cdot v = v \cdot (v^T \cdot v) = nv$$

zudem den Eigenvektor v zum Eigenwert n. Aus Dimensionsgründen sind 0 und n dann die einzigen Eigenwerte mit den arithmetischen Vielfachheiten $n-1$ bzw. 1. Somit hat B_n den Eigenwert -1 mit arithmetischer Vielfachheit $n-1$ und den Eigenwert $-1+n$ mit arithmetischer Vielfachheit 1. Also ist

$$\det(A_n) \;=\; (n!)^2 \det(B_n) = (-1)^{n-1}(n-1)(n!)^2.$$

Lösung 3: Dividiere für jedes $i = 1, \ldots, n$ die i-Zeile durch i, und für jedes $j = 1, \ldots, n$ die j-Zeile durch j. Wir erhalten

$$\det(A_n) = (n!)^2 \det \big(1 - \delta_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} = (n!)^2 \det(-I_n + vv^T)$$

mit $v := (1, \ldots, 1)^T$. Aus Wiederholungsserie I, Aufgabe 12 folgt

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= (n!)^2(-1)^n \det(I_n - vv^T) \\ &= (n!)^2(-1)^n \det(I_1 - v^T v) \\ &= (-1)^n(1-n)(n!)^2. \end{aligned}$$

6. [*9 Punkte*] Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, nicht notwendigerweise symmetrisch. Man nennt b

- *links-nichtausgeartet*, wenn gilt $\forall v \in V \smallsetminus \{0\}\ \exists w \in V\colon b(v,w) \neq 0$,
- *rechts-nichtausgeartet*, wenn gilt $\forall w \in V \smallsetminus \{0\}\ \exists v \in V\colon b(v,w) \neq 0$.

Zeige, dass diese beiden Bedingungen zueinander äquivalent sind.

Lösung: Da b in der zweiten Variable linear ist, ist für jedes $v \in V$ die Abbildung $b(v,\ )\colon V \to K$, $w \mapsto b(v,w)$ linear, das heisst ein Element des Dualraums V^*. Also haben wir eine natürliche Abbildung

$$k\colon V \to V^*, v \mapsto b(v,\ ).$$

Da b in der ersten Variable linear ist, ist die Abbildung k linear. [Das ist soweit eigentlich Stoff der Vorlesung, vgl. die Adjunktionsformel des Tensorprodukts.]

Sei nun b links-nichtausgeartet. Dann ist für jedes $v \in V \smallsetminus \{0\}$ die Linearform $b(v,\ )$ nicht die Nullabbildung. Also ist $\mathrm{Kern}(k) = 0$. Wegen $\dim_K(V) < \infty$ gilt $\dim_K(V^*) = \dim_K(V)$. Somit ist k eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen derselben endlichen Dimension. Daher ist k ein Isomorphismus.

Betrachte ein beliebiges $w \in V \smallsetminus \{0\}$. Dann existiert eine Linearform $\ell \in V^*$ mit $\ell(w) \neq 0$. Da k ein Isomorphismus ist, existiert ein $v \in V$ mit $\ell = b(v,\ )$. Dann folgt insbesondere auch $b(v,w) \neq 0$. Nach Definition ist b also rechts-nichtausgeartet.

Dies zeigt die Implikation „links-nichtausgeartet⇒rechts-nichtausgeartet“. Die umgekehrte Richtung folgt aus demselben Argument mit vertauschten Seiten, oder alternativ aus der bereits bewiesenen Richtung angewendet auf die Bilinearform $V \times V \to K$, $(v,w) \mapsto b(w,v)$.

Lösung 2: Wähle einen Isomorphismus $f\colon K^n \to V$. Eine direkte Rechnung (die auszuführen ist) zeigt, dass b links- bzw. rechts-nichtausgeartet ist genau dann, wenn die Bilinearform $b' := b \circ (f \times f)$ die entsprechende Eigenschaft hat. Die letztere lässt sich schreiben in der Form $b'(x,y) = x^T Ay$ für eine eindeutige $n \times n$-Matrix A über K.

Betrachte ein beliebiges $y \in K^n \smallsetminus \{0\}$. Dann gilt $\exists x \in K^n\colon x^T Ay \neq 0$ genau dann, wenn $Ay \neq 0$ ist. Somit ist b' rechts-nichtausgeartet genau dann, wenn der Kern der Abbildung $K^n \to K^n$, $y \mapsto Ay$ gleich Null ist. Dies ist äquivalent zu A invertierbar.

Betrachte andererseits ein beliebiges $x \in K^n \smallsetminus \{0\}$. Dann gilt $\exists y \in K^n\colon x^T Ay \neq 0$ genau dann, wenn der Zeilenvektor $x^T A \neq 0$ ist. Dies ist äquivalent zu $A^T x \neq 0$. Somit ist b' links-nichtausgeartet genau dann, wenn der Kern der Abbildung $K^n \to K^n$, $x \mapsto A^T x$ gleich Null ist. Das ist äquivalent zu A^T invertierbar.

Aber Invertierbarkeit ist invariant unter Transposition. Somit sind die beiden Bedingungen zueinander äquivalent.

7. [*9 Punkte*] Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V mit der Eigenschaft $f^2 = 2f$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist selbstadjungiert.

(b) f ist normal.

(c) $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ sind zueinander orthogonal.

Lösung: Die Voraussetzung $f^2 = 2f$ ist äquivalent zu $f^2 - 2f = 0$. Also ist das Minimalpolynom von f ein Teiler des Polynoms $X^2 - 2X = X(X-2)$. Da dieses in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Faktoren hat, ist f diagonalisierbar und hat höchstens die Eigenwerte 0 und 2. Für jedes $\lambda \in \{0, 2\}$ betrachte den zugehörigen Eigenraum $V_\lambda := \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. Dann gilt also $V = V_0 \oplus V_2$. Weiter ist $V_0 = \mathrm{Kern}(f)$. Ausserdem ist f auf V_2 gleich 2 mal der Identität, induziert also eine Bijektion $V_2 \to V_2$, und somit ist $V_2 = \mathrm{Bild}(f)$.

(a)$\Rightarrow$(b) Jeder selbstadjungierte Endomorphismus ist normal.

(b)$\Rightarrow$(c) Für jeden normalen Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Also sind $\mathrm{Kern}(f) = V_0$ und $\mathrm{Bild}(f) = V_2$ zueinander orthogonal.

(c)$\Rightarrow$(a) Wähle je eine Orthonormalbasis von V_0 und von V_2. Wegen (c) bilden diese zusammen eine Orthonormalbasis von $V = V_0 \oplus V_2$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Orthonormalbasis ist eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen 0 und 2. Diese Matrix ist reell symmetrisch, also selbstadjungiert, und somit ist f selbstadjungiert.

Vollstaendiges Argument:

8. Multiple Choice-Aufgaben. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Nur Ankreuzen, ohne Begründung.

Eine richtige Antwort gibt **1 Punkt**, keine Antwort gibt **0 Punkte**, und eine falsche Antwort gibt **-1 Punkt**. Eine negative Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgaben wird zu 0 aufgerundet.

(a) Jeder Unterraum eines Vektorraums V ist ein Komplement eines Komplements eines Unterraums von V.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Sei U ein Unterraum von V und W ein Komplement zu U in V. Dann ist U ein Komplement zum Komplement W.

(b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Die Summe zweier linear unabhängiger Eigenvektoren von f ist ein Eigenvektor genau dann, wenn sie Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Seien v_1, v_2 linear unabhängige Eigenvektoren von f zu den jeweiligen Eigenwerten λ_1, λ_2. Dann ist jedenfalls $v_1 + v_2 \neq 0$. Weiter ist

$$f(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu(v_1 + v_2)$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $(\lambda_1 - \mu)v_1 + (\lambda_2 - \mu)v_2 = 0$ ist für ein μ, wegen der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 also genau dann wenn $\lambda_1 - \mu = 0$ und $\lambda_2 - \mu = 0$ ist für ein μ, also genau dann wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ ist.

(c) Für jede diagonalisierbare reelle Matrix A existiert eine eindeutige invertierbare Matrix S sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Betrachte für $n > 0$ die Identitätsmatrix $A = I_n$. Dann hat für *jede* invertierbare Matrix S die Matrix $S^{-1}AS = I_n$ in Diagonalgestalt. Da mindestens zwei verschiedene $n \times n$ invertierbare Matrizen existieren, ist somit S nicht eindeutig und die Aussage falsch.

Aliter: Für jede invertierbare Matrix S ist auch $2S$ invertierbar und es gilt $(2S)^{-1}A(2S) = S^{-1}AS$. Ausserdem ist $2S \neq S$. Somit ist S nicht eindeutig.

(d) Jede reelle 2×2-Matrix ist ähnlich zu einer reellen Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Die Identitätsmatrix I_2 ist nur zu sich selbst ähnlich, somit also nie zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$.

(e) Je zwei reelle 3×3-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom

$$X^3 + X^2 + X - 3$$

sind zueinander ähnlich über $\mathbb{R}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Es ist

$$X^3 + X^2 + X - 3 = (X - 1) \cdot (X^2 + 2X + 3).$$

Dieses hat keine mehrfachen Faktoren und $X^2 + 2X + 3$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$. Somit ist die Jordansche Normalform eindeutig durch das charakteristische Polynom bestimmt.

(f) Für jede Teilmenge S eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V gilt $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Aus der Definition des orthogonalen Komplements folgt $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$. Wegen $\dim(V) < \infty$ erfüllt andererseits jeder Unterraum U die Gleichung $(U^\perp)^\perp = U$. Zusammen folgt daraus $(S^\perp)^\perp = (\langle S \rangle^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.

(g) Für jede positiv definite Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum existiert eine geordnete Basis B, so dass die Darstellungsmatrix $M_B(\beta)$ nur positive Einträge hat.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Denn es existiert eine Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$, und die Basis $(b_1, b_1+b_2, b_1+b_3, \ldots, b_1+b_n)$ hat dann die gesuchte Eigenschaft.

(h) Jeder unitäre Endomorphismus $S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, welcher zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$ festlässt, ist die Identität.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Für jede komplexe Zahl $\zeta \neq 1$ mit $|\zeta| = 1$ ist die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1, 1, \zeta)$ unitär und ungleich der Identität.

(i) Sei A eine beliebige invertierbare komplexe Matrix. Ist A^n reell für alle $n \geq 2015$, so ist A selbst schon reell.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Wegen A invertierbar ist A^{2015} invertierbar. Da A^{2015}, A^{2016} reell sind, ist somit auch $A = (A^{2015})^{-1} A^{2016}$ reell.

(j) Die hermitesche Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Mit $v := (1, -1)^T$ gilt $v^T \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{pmatrix} v = -3 < 0$.

(k) Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums ist ein Isomorphismus genau dann, wenn seine Adjungierte ein Isomorphismus ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Ist die Darstellungsmatrix des Endomorphismus bezüglich einer geordneten Orthonormalbasis gleich A, so ist die Darstellungsmatrix des adjungierten Endomorphismus bezüglich derselben Basis gleich A^*. Wegen $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ ist A^* invertierbar genau dann, wenn A invertierbar ist.

(l) Es existiert ein K-Vektorraum E mit der universellen Eigenschaft: Für jeden K-Vektorraum V existiert genau eine lineare Abbildung $E \to V$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Der Nullraum O hat diese Eigenschaft, denn für jeden K-Vektorraum V existiert genau eine lineare Abbildung $O \to V$, nämlich die Nullabbildung.

(m) Für jeden Vektorraum der Dimension $n < \infty$ gilt $\dim \Lambda^2(\Lambda^2(V)) = 3\binom{n+1}{4}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig, denn $\dim \Lambda^2(V) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ und somit

$$\dim \Lambda^2(\Lambda^2(V)) = \binom{n(n-1)/2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{8} \cdot n(n-1) \cdot (n(n-1) - 2) = \frac{3}{24} \cdot n(n-1) \cdot (n+1)(n-2) = 3\binom{n+1}{4}.$$

(n) Jeder K-Vektorraum V mit der Eigenschaft $\forall v, w \in V\colon\ v \otimes w = w \otimes v$ in $V \otimes_K V$ hat Dimension 0.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch, denn es gilt auch im Fall $\dim(V) = 1$. Für jeden Basisvektor $b \in V$ ist dann nämlich $V = \{\lambda b \mid \lambda \in K\}$, und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda b) \otimes (\mu b) = \lambda\mu(b \otimes b) = (\mu b) \otimes (\lambda b)$.

(o) Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis B. Dann bilden die Vektoren $v \wedge w$ für alle $v, w \in B$ eine Basis von $\Lambda^2 V$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Die korrekte Aussage lautet: Für jede Totalordnung $\prec$ auf B bilden die Vektoren $v \wedge w$ für alle $v, w \in B$ mit $v \prec w$ (!) eine Basis von $\Lambda^2 V$.