Lineare Algebra I/II

D-MATH, HS 14/FS 15

Prof. Richard Pink

Basisprüfung

18. August 2015

1. [*6 Punkte*] Betrachte den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt, und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde eine Orthonormalbasis des Unterraums $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(b) Finde eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

2. [*5 Punkte*] Sei V der Vektorraum aller reellen Polynome in der Variable x vom Grad $\leq n$. Betrachte die lineare Abbildung

$$\Phi\colon V \to V,\ u(x) \mapsto \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \big((x+1)^2 \cdot u(x)\big).$$

(a) Bestimme die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$.

(b) Existiert eine Basis aus Eigenvektoren von Φ?

3. [*5 Punkte*] Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde über $\mathbb{Q}$ eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L und eine Matrix U in Zeilenstufenform mit $A = L \cdot U$.

(b) Für welche Primzahlen p existiert eine solche Zerlegung über $\mathbb{F}_p$?

4. [*11 Punkte*] Betrachte die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme die Jordansche Normalform von A.

(c) Berechne $\mathrm{Spur}(A^n)$ für alle $n \geq 0$.

(d) Bestimme eine Jordanbasis von A.

(e) Finde den rechten oberen Eintrag von A^n für alle $n \geq 0$.

5. [*7 Punkte*] Für alle $n \geq 1$ berechne die Determinante der rationalen Matrix $A_n := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ i \cdot j & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

6. [*9 Punkte*] Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, nicht notwendigerweise symmetrisch. Man nennt b

- *links-nichtausgeartet*, wenn gilt $\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in V\colon b(v,w) \neq 0$,
- *rechts-nichtausgeartet*, wenn gilt $\forall w \in V \setminus \{0\}\ \exists v \in V\colon b(v,w) \neq 0$.

Zeige, dass diese beiden Bedingungen zueinander äquivalent sind.

7. [*9 Punkte*] Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V mit der Eigenschaft $f^2 = 2f$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist selbstadjungiert.

(b) f ist normal.

(c) $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ sind zueinander orthogonal.

8. Multiple Choice-Aufgaben. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Nur Ankreuzen, ohne Begründing.

Eine richtige Antwort gibt **1 Punkt**, keine Antwort gibt **0 Punkte**, und eine falsche Antwort gibt **-1 Punkt**. Eine negative Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgaben wird zu 0 aufgerundet.

(a) Jeder Unterraum eines Vektorraums V ist ein Komplement eines Komplements eines Unterraums von V.

☐ Richtig ☐ Falsch

(b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Die Summe zweier linear unabhängiger Eigenvektoren von f ist ein Eigenvektor genau dann, wenn sie Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind.

☐ Richtig ☐ Falsch

(c) Für jede diagonalisierbare reelle Matrix A existiert eine eindeutige invertierbare Matrix S sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

☐ Richtig ☐ Falsch

(d) Jede reelle 2×2-Matrix ist ähnlich zu einer reellen Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(e) Je zwei reelle 3×3-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom

$$X^3 + X^2 + X - 3$$

sind zueinander ähnlich über $\mathbb{R}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(f) Für jede Teilmenge S eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V gilt $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S \rangle$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(g) Für jede positiv definite Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum existiert eine geordnete Basis B, so dass die Darstellungsmatrix $M_B(\beta)$ nur positive Einträge hat.

☐ Richtig ☐ Falsch

(h) Jeder unitäre Endomorphismus $S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, welcher zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$ festlässt, ist die Identität.

☐ Richtig ☐ Falsch

(i) Sei A eine beliebige invertierbare komplexe Matrix. Ist A^n reell für alle $n \geq 2015$, so ist A selbst schon reell.

☐ Richtig ☐ Falsch

(j) Die hermitesche Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

☐ Richtig ☐ Falsch

(k) Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums ist ein Isomorphismus genau dann, wenn seine Adjungierte ein Isomorphismus ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

(l) Es existiert ein K-Vektorraum E mit der universellen Eigenschaft: Für jeden K-Vektorraum V existiert genau eine lineare Abbildung $E \to V$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(m) Für jeden Vektorraum der Dimension $n < \infty$ gilt $\dim \Lambda^2(\Lambda^2(V)) = 3\binom{n+1}{4}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(n) Jeder K-Vektorraum V mit der Eigenschaft $\forall v, w \in V\colon\ v \otimes w = w \otimes v$ in $V \otimes_K V$ hat Dimension 0.

☐ Richtig ☐ Falsch

(o) Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis B. Dann bilden die Vektoren $v \wedge w$ für alle $v, w \in B$ eine Basis von $\Lambda^2 V$.

☐ Richtig ☐ Falsch