Lineare Algebra I/II

D-MATH und D-PHYS, HS 14/FS 15 Prof. Richard Pink

Basisprüfung

8. Februar 2016

1. [*8 Punkte*] Für einen gegebenen Parameter a betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie für eine beliebige Primzahl p den Rang von A über $\mathbb{F}_p$ in Abhängigkeit von a.

Lösung: Vertauschen wir die erste Zeile von A mit deren zweiten Zeile und deren dritte Zeile mit deren vierten Zeile, dann erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir die erste Zeile dieser Matrix von deren zweiten und deren vierten Zeile und addieren sie zweimal zu deren dritten Zeile, dann erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & a-4 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & a^2+3a+2 \end{pmatrix}.$$

Addieren wir die zweite Zeile dieser Matrix einmal zu deren dritten Zeile und subtrahieren sie zweimal von deren vierten Zeile, dann erhalten wir die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a \end{pmatrix}.$$

Da B aus A durch Vertauschen und sukzessives Addieren ganzzahliger Vielfacher von Zeilen zu anderen Zeilen entsteht, gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$ und

$$\det(A) = \pm\det(B) = \pm(a+1)a(a+3)$$

sowohl über $\mathbb{Q}$ als auch über jedem endlichen Körper. Folglich hat A genau dann Rang 4, wenn im jeweiligen Körper $a \neq -1$ und $a \neq 0$ und $a \neq -3$ gilt, und sonst Rang < 4. Es bleibt also der Rang von A zu bestimmen in den Fällen $a = -1$ und $a = 0$ und $a = -3$.

(a) Über $\mathbb{Q}$ ist $-2 \neq 0$. In jedem der Fälle $a = -1$ und $a = 0$ und $a = -3$ sind dann die erste, zweite und vierte Spalte linear unabhängig, so dass B und daher auch A dann Rang 3 hat.

(b) Über $\mathbb{F}_2$ ist $-2 = 0$ und $a(a+3) = 0$ für beliebiges $a \in \mathbb{F}_2$. In diesem Fall ist demnach die vierte Spalte von B linear abhängig von den ersten beiden Spalten. Die drei ersten Spalten sind genau dann linear unabhängig, wenn $a = 0$ ist, während die ersten beiden Spalten in jedem Fall linear unabhängig sind. Folglich hat A über $\mathbb{F}_2$ genau dann Rang 3, wenn $a = 0$ ist, und Rang 2 sonst.

Im Fall $p > 2$ ist $-2 \neq 0$ über $\mathbb{F}_p$. In jedem der Fälle $a = -1$ und $a = 0$ und $a = -3$ sind dann die erste, zweite und vierte Spalte linear unabhängig, so dass A dann Rang 3 hat.

2. [*6 Punkte*] Sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 in $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt, welches für $p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2$ und $q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2$ in V definiert ist durch

$$\langle p(X), q(X)\rangle := p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2.$$

Betrachten Sie zudem für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ den Endomorphismus

$$\Phi_s\colon V \to V,\ p(X) \mapsto p(X+s).$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ_s bezüglich der geordneten Basis $(1, X, X^2)$.

(b) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche Φ_s normal ist.

Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_s(1) &= 1,\\ \Phi_s(X) &= s \cdot 1 + X,\\ \Phi_s(X^2) &= s^2 \cdot 1 + 2s \cdot X + X^2.\end{aligned}$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}(\Phi_s)$ von Φ_s bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{E} := (1, X, X^2)$ gleich

$$M_{\mathcal{E}}(\Phi_s) = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Da $\mathcal{E}$ eine Orthonormalbasis von V ist, gilt

$$M_{\mathcal{E}}(\Phi_s^*) = M_{\mathcal{E}}(\Phi_s)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ s^2 & 2s & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist Φ_s genau dann normal, wenn

$$A_s := M_{\mathcal{E}}(\Phi_s) M_{\mathcal{E}}(\Phi_s)^T = M_{\mathcal{E}}(\Phi_s)^T M_{\mathcal{E}}(\Phi_s) =: B_s$$

ist. Der linke obere Eintrag von A_s ist $1 + s^2 + s^4$, während der linke obere Eintrag von B_s gleich 1 ist. Damit $A_s = B_s$ gilt, muss folglich $s = 0$ sein. Ist umgekehrt $s = 0$, dann ist $M_{\mathcal{E}}(\Phi_s) = I_3 = M_{\mathcal{E}}(\Phi_s)^T$ und folglich $A_s = B_s$. Also ist Φ_s genau dann normal, wenn $s = 0$ ist.

3. [*5 Punkte*] Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der reellen symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun eine rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

mit positiven Einträgen auf der Diagonale, so dass $A = R^T R$ ist. Letztere Bedingung entspricht den Gleichungen

$$\begin{aligned} 4 &= a_{11} = r_{11}^2, \\ 2 &= a_{12} = r_{11} r_{12}, \\ 2 &= a_{13} = r_{11} r_{13}, \\ 5 &= a_{22} = r_{12}^2 + r_{22}^2, \\ 3 &= a_{23} = r_{12} r_{13} + r_{22} r_{23}, \\ 6 &= a_{33} = r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2. \end{aligned}$$

Hierfür liefern die zusätzlichen Bedingungen $r_{11} > 0, r_{22} > 0, r_{33} > 0$ die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 2,\\
r_{12} &= \frac{a_{12}}{r_{11}} = 1,\\
r_{13} &= \frac{a_{13}}{r_{11}} = 1,\\
r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = 2,\\
r_{23} &= \frac{1}{r_{22}}\left(a_{23} - r_{12}r_{13}\right) = 1,\\
r_{33} &= \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = 2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. [*11 Punkte*] Betrachten Sie die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

(c) Berechnen Sie eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich A.

(d) Berechne die Exponentialmatrix $\exp(A)$.

Lösung: (a) Entwicklung der folgenden Determinante entlang der zweiten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}
\mathrm{char}_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 1 & 0 & X-0 \end{pmatrix} &= (X-2)[(X-2)X-(-1)]\\
&= (X-2)(X-1)^2.
\end{aligned}$$

(b) Weil $\mathrm{char}_A(X) = (X-2)(X-1)^2$ ist, hat A den Eigenwert 2 mit algebraischer und folglich geometrischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Demnach hat die Jordannormalform von A einen Jordanblock der Länge 1 zum Eigenwert 2. Zum Eigenwert 1 berechnen wir

$$B := A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die ersten beiden Spalten von B linear unabhängig sind, sich aber zur dritten Spalte aufaddieren, ist $\mathrm{Rang}(B) = 2$. Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ist folglich eindimensional, so dass die Jordannormalform von A zudem einen Jordanblock der Länge 2 zum Eigenwert 1. Die Jordannormalform von A ist also eindeutig bis auf Vertauschung der Jordanblöcke gleich

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Gesucht ist eine geordnete Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ mit einem Eigenvektor v_1 von A zum Eigenwert 2, mit $v_3 \in \mathrm{Kern}(B^2) \smallsetminus \mathrm{Kern}(B)$ und $v_2 = B \cdot v_3$.

Ein Vektor $(x \;\; y \;\; z)^T \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann in $\mathrm{Eig}_2(A)$, wenn $A(x \;\; y \;\; z)^T = 2(x \;\; y \;\; z)^T$ ist, das heisst wenn

$$2x + z = 2x \quad \text{und} \quad 2y + z = 2y \quad \text{und} \quad -x = 2z$$

gilt. Aus der ersten der letzten drei Gleichungen folgt $x = 0$ und damit aus der letzten $z = 0$. Folglich ist $\mathrm{Eig}_2(A) = \mathbb{R} \cdot (0 \;\; 1 \;\; 0)^T$. Weiter ist

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass ein Vektor $(x \;\; y \;\; z)^T \in \mathbb{R}^3$ genau dann in $\mathrm{Ker}(B^2)$ liegt, wenn $-x+y = 0$ ist. Folglich liegen die zwei linear unabhängigen Vektoren $(1 \;\; 1 \;\; 0)^T$ und $(1 \;\; 1 \;\; 1)^T$ in $\mathrm{Ker}(B^2)$. Da $\dim(\mathrm{Kern}(B)) = 3 - \mathrm{Rang}(B) = 1$ ist, liegt also mindestens einer der beiden Vektoren in $\mathrm{Kern}(B^2) \smallsetminus \mathrm{Kern}(B)$. Durch Testen erhalten wir $(1 \;\; 1 \;\; 0)^T \in \mathrm{Kern}(B^2) \smallsetminus \mathrm{Kern}(B)$. Wegen $B \cdot (1 \;\; 1 \;\; 0)^T = (1 \;\; 1 \;\; -1)^T$ ist also nach Konstruktion

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich A.

(d) Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir

$$\exp(J) := \sum_{n \geq 0} \frac{J^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{2^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!} & \frac{n}{n!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix

$$S := (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Inverser} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt nach Konstruktion $A = SJS^{-1}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(A) = \exp(SJS^{-1}) = S\exp(J)S^{-1} &= S \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2e & 0 & e \\ -e^2 + 2e & e^2 & e \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aliter: Alternativ lässt sich $\exp(J)$ folgendermassen berechnen: Da

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

miteinander kommutieren und $N^n = 0$ ist für $n \geq 2$, gilt

$$\begin{aligned} \exp(J) &= \exp(D+N) = \exp(D) \cdot \exp(N) \\ &= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. [*7 Punkte*] Bestimmen Sie für beliebiges $n \geq 1$ die Determinante der rationalen Matrix

$$A_n := \left(\delta_{ij} + \frac{i}{j} \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet.

Lösung:

Ausgeschrieben hat die Matrix A_n die Form

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{2}{1} & 1 + \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & 1 + \frac{3}{3} & \cdots & \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \cdots & 1 + \frac{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir für jedes $2 \leq i \leq n$ ihre erste Zeile i Mal von ihrer i-ten Zeile, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Addieren wir für jedes $2 \leq j \leq n$ die erste Spalte dieser Matrix j Mal zu derer j-ten Spalte, so erhalten wir die obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1+n & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $(1+n) \cdot 1^{n-1} = 1+n$. Da wir diese Dreiecksmatrix aus A_n durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten haben, ist $1+n$ auch die Determinante von A_n.

Aliter:

Es ist $A_n = I_n + vw^T$ für $v := (1, 2, 3, \ldots, n)^T$ und $w := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n})^T$. Die Matrix vw^T hat Rang 1 und also den Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit $n-1$. Folglich hat A_n den Eigenwert 1 mit geometrischer Vielfachheit $n-1$. Zudem ist

$$(vw^T)v = v(w^Tv) = (w^Tv)v = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i} i \right) v = nv$$

und also $A_n v = (1+n)v$. Folglich hat A_n den Eigenwert $(1+n)$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit $n-1$. Die Determinante von A_n ist demnach $(1+n) \cdot 1^{n-1} = 1+n$.

Aliter:

Wir haben $A_n = I_n + v \cdot w^T$ für $v := (1, 2, 3, \ldots, n)^T$ und $w := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n})^T$. Mit Wiederholungsserie I, Aufgabe 12 folgt

$$\det A_n = \det(I_n + vw^T) = \det(I_1 + w^Tv) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} i = 1+n.$$

6. [*9 Punkte*] Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(a) Für jeden Untervektorraum $W \subset V$ gilt $f(W) \subset W$.

(b) Es existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

(c) Für jeden Endomorphismus $g\colon V \to V$ ist $f \circ g = g \circ f$.

Lösung: Es genügt, die drei Implikationen (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) zu zeigen.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$, und sei g ein beliebiger Endomorphismus von V. Wegen der Linearität von g ist dann

$$(f \circ g)(v) = f(g(v)) = \lambda g(v) = g(\lambda v) = g(f(v)) = (g \circ f)(v)$$

für alle $v \in V$ und also $f \circ g = g \circ f$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei W ein beliebiger Untervektorraum von V. Wähle ein Komplement W' von W in V. Sei g der Endomorphismus von V, welcher sich auf W zur Identität und auf W' zur Nullabbildung einschränkt. Dann ist $g(V) = g(W) = W$ und also nach Voraussetzung

$$f(W) = f(g(W)) = (f \circ g)(W) = (g \circ f)(W) = g(f(W)) \subset g(V) = W$$

wie gewünscht.

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach Voraussetzung bildet f insbesondere jeden Untervektorraum der Dimension 1 auf sich selbst ab. Für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ist somit $f(K \cdot v) \subset K \cdot v$, so dass ein eindeutiges $\lambda_v \in K$ mit $f(v) = \lambda_v v$ existiert. Sodann betrachten wir beliebige $v, w \in V \setminus \{0\}$ und zeigen, dass $\lambda_v = \lambda_w$ ist. Ist w ein skalares Vielfaches von v, also $w = \mu v$ für ein $\mu \in K^\times$, so folgt dies aus der Rechnung

$$\lambda_w \mu v = \lambda_w w = f(w) = f(\mu v) = \mu f(v) = \mu \lambda_v v$$

durch Koeffizientenvergleich und Dividieren durch μ. Andernfalls sind v und w linear unabhängig, und die Rechnung

$$\lambda_{v+w} v + \lambda_{v+w} w = \lambda_{v+w}(v + w) = f(v + w) = f(v) + f(w) = \lambda_v v + \lambda_w w$$

liefert mit Koeffizientenvergleich $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Sei schliesslich $\lambda \in K$ der gemeinsame Wert aller λ_v für $v \in V \setminus \{0\}$ falls $V \neq 0$ ist, oder irgendein Element von K, falls $V = 0$ ist. Dann gilt auch $f(0) = 0 = \lambda 0$, also nach Konstruktion $f(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$, was zu zeigen war.

Aliter: Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Für jedes $1 \in i \leq n$ ist nach derselben Vorbemerkung wie oben $f(v_i) = \lambda_{v_i} v_i$. Folglich ist die Darstellungsmatrix von f bezüglich B die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_{v_1}, \ldots, \lambda_{v_n}$. Es genügt zu zeigen, dass $\lambda_{v_i} = \lambda_{v_j}$ ist für alle $1 \leq i < j \leq n$. Für solche i, j ist aber

$$\lambda_{v_i+v_j} v_i + \lambda_{v_i+v_j} v_j = \lambda_{v_i+v_j}(v_i + v_j) = f(v_i + v_j) = f(v_i) + f(v_j) = \lambda_{v_i} v_i + \lambda_{v_j} v_j.$$

Da v_i und v_j linear unabhängig sind, folgt daraus durch Koeffizientenvergleich $\lambda_{v_i} = \lambda_{v_i+v_j} = \lambda_{v_j}$.

Variante, den Nullraum separat zu behandeln: Falls $V = 0$ ist, dann gilt (a), da V der einzige Untervektorraum von V ist und es gilt (b), da $f = 0 = \mathrm{id}_V$ ist und es gilt (c), da $f \circ g = 0 = g \circ f$ ist für jeden Endomorphismus g von V. Insbesondere sind in diesem Fall alle drei Aussagen äquivalent. Es genügt also, den Fall $V \neq 0$ zu betrachten.

Variante mit der Implikation (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$ und sei W ein Untervektorraum von V. Da W abgeschlossen ist unter skalarer Multiplikation, gilt $f(w) = \lambda w \in W$ für alle $w \in W$ und also $f(W) \subset W$.

Variante mit der Implikation (c) $\Rightarrow$ (b): Betrachte ein beliebiges $0 \neq v \in V$ und wähle eine Projektion g von V auf $K \cdot v$. Nach Vorraussetzung ist dann

$$g(f(v)) = (g \circ f)(v) = (f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(v).$$

Da das Bild von g in $K \cdot v$ liegt, existiert ein eindeutiges $\lambda_v \in K$ mit $f(v) = \lambda_v v$. Von hier an argumentiert man wie bei (a) $\Rightarrow$ (b)

Variante mit der Implikation (a) $\Rightarrow$ (c): Für jedes $0 \neq v \in V$ ist nach Voraussetzung $f(K \cdot v) \subset K \cdot v$, so dass ein eindeutiges $\lambda_v \in K$ mit $f(v) = \lambda_v v$ existiert. Sei nun g ein beliebiger Endomorphismus von V und sei $0 \neq v \in V$ ein beliebiges Element. Es genügt zu zeigen, dass $f(g(v)) = g(f(v))$ ist. Falls v und $g(v)$ linear abhängig sind, dann existiert ein $\mu \in K$ mit $g(v) = \mu v$, womit folglich

$$f(g(v)) = f(\mu v) = \mu f(v) = \mu \lambda_v v = \lambda_v g(v) = g(\lambda_v v) = g(f(v))$$

gilt. Falls v und $g(v)$ linear unabhängig sind, dann ist

$$\lambda_v v + \lambda_{g(v)} g(v) = f(v) + f(g(v)) = f(v + g(v)) = \lambda_{v+g(v)} v + \lambda_{v+g(v)} g(v)$$

und folglich $\lambda_v = \lambda_{v+g(v)} = \lambda_{g(v)}$. In diesem Fall folgt daraus die Gleicheit

$$g(f(v)) = g(\lambda_v v) = \lambda_v g(v) = \lambda_{g(v)} g(v) = f(g(v)).$$

7. [*9 Punkte*] Sei n eine positive ganze Zahl, und sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums mit charakteristischem Polynom $X^{n^2} - 1$. Bestimmen Sie:

(a) das charakteristische Polynom von f^n.

(b) das Minimalpolynom von f^n.

(c) das charakteristische Polynom von $f + f^{-1}$ im Fall $n = 2$.

Schreiben Sie das Resultat jeweils in möglichst kurzer Form.

Lösung: (a) Sei ξ_{n^2} eine primitive n^2-te Einheitswurzel. Dann ist $\xi_n := \xi_{n^2}^n$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Das Polynom $X^{n^2}-1$ hat die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen $1, \xi_{n^2}, \xi_{n^2}^2, \ldots, \xi_{n^2}^{n^2-1}$ und zerfällt folglich über $\mathbb{C}$ in paarweise inäquivalente Linearfaktoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich einer geeigneten Basis aus Eigenvektoren ist also die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $1, \xi_{n^2}, \xi_{n^2}^2, \ldots, \xi_{n^2}^{n^2-1}$.

Die Darstellungsmatrix von f^n bezüglich derselben Basis ist dann die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $1^n, \xi_{n^2}^n, \xi_{n^2}^{2n}, \ldots, \xi_{n^2}^{(n^2-1)n}$. Das charakteristische Polynom von f^n ist demnach

$$\begin{aligned}
\prod_{0\le i\le n^2-1} (X-(\xi_{n^2}^i)^n) &= \prod_{0\le i\le n^2-1} (X-(\xi_{n^2}^n)^i) = \prod_{0\le i\le n^2-1} (X-\xi_n^i) \\
&= \prod_{0\le k\le n-1} \left(\prod_{kn\le i<(k+1)n} (X-\xi_n^i) \right) = \prod_{0\le k\le n-1} \left(\prod_{0\le i<n} (X-\xi_n^i) \right) \\
&= \prod_{0\le k\le n-1} (X^n-1) = (X^n-1)^n.
\end{aligned}$$

(b) Da f^n diagonalisierbar ist, ist sein Minimalpolynom das Produkt aller irreduziblen Faktoren seines charakteristischen Polynoms $(X^n-1)^n$. Als Potenz von X^n-1 hat $(X^n-1)^n$ dieselben irreduziblen Faktoren wie X^n-1. Da X^n-1 in die paarweise inäquivalenten Linearfaktoren $X-\xi_n^i$ über alle $0\le i<n$ faktorisiert, und da Letztere als lineare Polynome irreduzibel sind, ist das Minimalpolynom von f^n folglich X^n-1.

Aliter: Das charakteristische Polynom $X^{n^2}-1$ von f zerfällt in paarweise inäquivalente Linearfaktoren und ist folglich auch das Minimalpolynom von f. Insbesondere ist $(f^n)^n-1 = f^{n^2}-1 = 0$. Das Minimalpolynom $P(X)$ von f^n teilt folglich X^n-1. Wir behaupten, dass $P(X) = X^n-1$ ist. Da X^n-1 normiert ist, genügt es zu zeigen, dass $P(X)$ Grad $\ge n$ hat. Sei $Q(X) := P(X^n)$. Wegen $P(f^n)=0$ ist $Q(f)=0$. Folglich wird $Q(X)$ vom Minimalpolynom $X^{n^2}-1$ von f geteilt. Somit ist $n\cdot\deg(P) = \deg(Q) \ge n^2$ und also tatsächlich $\deg(P)\ge n$.

(c) In diesem Fall hat das charakteristische Polynom von f die Nullstellen $1, -1, i, -i$ und zerfällt folglich in paarweise inäquivalente Linearfaktoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich einer geeigneten Basis aus Eigenvektoren ist also die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $1, -1, i, -i$. Die Darstellungsmatrix von f^{-1} bezüglich derselben Basis ist dann die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{-1}=-1,\ \frac{1}{i}=-i,\ \frac{1}{-i}=i.$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von $f+f^{-1}$ bezüglich derselben Basis die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$1+1=2,\ -1+(-1)=-2,\ i+(-i)=0,\ -i+i=0.$$

Das charakteristische Polynom von $f + f^{-1}$ ist also gleich

$$(X-2)(X-(-2))(X-0)(X-0) = (X^2-4)X^2.$$

8. Multiple Choice-Aufgaben. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Nur Ankreuzen, ohne Begründung.

Eine korrekte Antwort gibt **1 Punkt**, keine Antwort gibt **0 Punkte**, und eine inkorrekte Antwort gibt **-1 Punkt**. Eine negative Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgaben wird zu 0 aufgerundet.

(a) Es ist $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = p(2)\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Betrachte beliebige $f, g \in W := \{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = p(2)\}$ und ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f+g)(2)$$

und $(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda f(2) = (\lambda f)(2)$. Also sind auch $f + g \in W$ und $\lambda f \in W$. Zudem liegt auch das Nullpolynom $0(X) \in \mathbb{R}[X]$ in W, da $0(1) = 0 = 0(2)$ ist. Folglich ist W ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

(b) Jeder surjektive Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ ist auch injektiv.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Die Differentialabbildung $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ p \mapsto \frac{dp}{dX}$ ist ein surjektiver aber nicht injektiver Endomorphismus.

(c) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann existiert für jedes $\ell \in V^*$ genau ein Vektor $v_0 \in V$ mit $\ell(v) = \langle v_0, v\rangle$ für alle $v \in V$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Wegen der Positiv Definitheit von $\langle\ ,\ \rangle$ ist die lineare Abbildung $V \to V^*$, $v_0 \mapsto \langle v_0,\ \rangle$ injektiv und folglich, da V endlich-dimensional ist, auch surjektiv, also bijektiv.

(d) Jeder K-Vektorraum ist isomorph zu dem Quotientenvektorraum U_1/U_2 für geeignete *nicht-triviale* K-Vektorräume $U_2 \subset U_1$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Sei V ein K-Vektorraum. Wähle einen beliebigen nicht-verschwindenden K-Vektorraum W. Sei $U_1 := W \boxplus V$ und sei U_2 das Bild der natürlichen Einbettung $W \to U_1$. Dann ist die Komposition der natürlichen Einbettung $V \to U_1$ mit der Projektionsabbildung $U_1 \to U_1/U_2$ ein geeigneter Isomorphismus.

(e) Für beliebige endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind $(V \boxplus W)^*$ und $\mathrm{Hom}_K(V, W^*)$ isomorph.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Es ist $\dim((V \boxplus W)^*) = \dim(V) + \dim(W)$ und

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W^*)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Falls etwa $\dim(V) = 1$ ist, stimmt die Aussage folglich nicht.

(f) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums. Falls f kein Isomorphismus ist, dann ist $\dim(\mathrm{Kern}(f^2)) > \dim(\mathrm{Kern}(f))$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Sei V ein nicht-verschwindender endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei f eine Projektionsabbildung von V auf einen Untervektorraum $W \subsetneq V$. Dann ist $\mathrm{Kern}(f^2) = \mathrm{Kern}(f)$, obwohl f kein Isomorphismus ist.

(g) Jede Permutationsmatrix ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Zum Beispiel besitzt die Permutationsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $X^3 - 1$ mit den drei komplexen Nullstellen $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$. Da diese nicht alle reell sind, ist P nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(h) Für jeden Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums haben f und die zu f duale Abbildung $f^* : V^* \to V^*$ dieselbe Jordansche Normalform.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Hat f bezüglich einer geordneten Basis B die Darstellungsmatrix A, dann hat f^* bezüglich der zu B dualen Basis die Darstellungsmatrix A^T. Nach §8.10 ist A zu A^T ähnlich, also besitzen f und f^* dieselbe Jordansche Normalform.

(i) Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit den Eigenwerten -1 und 1. Sei B eine weitere solche Matrix. Dann liegen die Eigenwerte von $A+B$ in $\{-2, 0, 2\}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $a \neq \pm 2$ sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Gegenbeispiel.

(j) Für je zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ existiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, für welches die Vektoren v_1, v_2 Teil einer Orthonormalbasis sind.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Im Fall $v_1 = v_2 = 0$ sind die Vektoren v_1, v_2 nie Teil einer Basis.

(Sind dagegen v_1, v_2 linear unabhängig, so können wir sie zu einer geordneten Basis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ergänzen. Dann existiert eine eindeutige Bilinearform β auf $\mathbb{R}^4$ mit Darstellungsmatrix $M_{BB}(\beta) = I_4$. Diese ist dann positiv definit, also ein Skalarprodukt, und B ist eine Orthogonalbasis.)

(k) Für jede symmetrische reelle $n \times n$-Matrix A ist A^2 positiv definit genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Siehe die Äquivalenz von (a) und (e) in §9.15.

(l) Eine symmetrische reelle Bilinearform β ist null genau dann, wenn die zugehörige quadratische Form $x \mapsto \beta(x, x)$ identisch null ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Die Aussage folgt aus der Polarisationsidentität, vergleiche die Lösung zu Serie 13, Aufgabe 6.

(m) Eine Drehung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ fest lässt, ist die Identität.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Eine Drehung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann die Identität, wenn sie Drehwinkel 0 hat, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn ein von ihrer Drehachse linear unabhängiger Vektor existiert, den sie auf sich selbst abbildet. Weil in unserem Fall v_1 und v_2 linear unabhängig sind, ist mindestens einer der beiden Vektoren linear unabhängig zur Drehachse der Drehung S. Da S jeden der beiden Vektoren auf sich selbst abbildet, ist folglich S die Identität.

(n) Jeder orthogonale Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums von gerader endlicher Dimension hat Determinante 1.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Betrachte zum Beispiel $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

(o) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Dann ist das Bild von f orthogonal zum Kern der Adjungierten f^*.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung: Richtig. Für alle $v \in V$ und alle $w \in \mathrm{Kern}(f^*)$ ist

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf V bezeichne.