Lineare Algebra I

D-MATH, HS 2014

Prof. Richard Pink

Lineare Algebra I

Zwischenprüfung

9. Februar 2015

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **120 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Antworten werden auf dem beiliegenden Antwortzettel angekreuzt; das Aufgabenblatt können Sie mitnehmen.
- In jeder Aufgabe ist **genau eine Antwort richtig**. Ist diese und nur diese angekreuzt, so erhalten Sie **3 Punkte**. Ist keine Antwort oder sind mehrere Antworten angekreuzt, so erhalten Sie **0 Punkte**. Ist eine falsche Antwort und nur diese angekreuzt, so erhalten Sie **1 Minuspunkt**.
- Korrekturen auf dem Antwortblatt bitte mit Tipp-Ex durchführen.
- Hilfsmittel: Keine. (Insbesondere keine Zusammenfassung, keine Literatur, keine Notizen, keine elektronischen Hilfsmittel wie z.B. Taschenrechner, keine Kommunikationsmittel wie z.B. Handy.)

Viel Erfolg!

1. Welche der folgenden Definitionen ergibt einen Sinn? (Der Nutzen ist irrelevant.) Eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen $f\colon V \to W$ heisst

(a) *Antimorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v, w \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f(v+w) = f(v) + f(w)\ \wedge\ f(\lambda v) = \frac{f(v)}{\lambda}.$$

(b) *Polymorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v_1, v_2 \ldots \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f\big(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} v_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} f(v_i)\ \wedge\ f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

(c) *Unimorphismus*, wenn gilt:

$$\exists\, w \in W\ \forall\, v \in V\colon\ f(v+w) = w.$$

(d) *Affinomorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v, w \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f(v + \lambda w) = (1-\lambda) f(v) + \lambda f(v+w).$$

(e) *Retromorphismus*, wenn gilt:

$$\exists\, w \in W\ f(v) = w\ \forall\, v \in V.$$

2. Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A+B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

(a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A+B)(B+A)$

(c) $(B+A)^2$

(d) $A(A+B) + B(A+B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$.

3. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse der 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Für welchen der gegebenen Werte von a besitzt das reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\,x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & a\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung?

(a) $a = 0$
(b) $a = 1$
(c) $a = 2$
(d) $a = \sqrt{2}$

5. Die Dimension des Bildes der linearen Abbildung L_A für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

6. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Matrix U über $\mathbb{Q}$ mit $UA = B$, so dass U

(a) eine obere Dreiecksmatrix ist.
(b) eine untere Dreiecksmatrix ist.
(c) eine Permutationsmatrix ist.
(d) eine nicht-invertierbare Matrix ist.

7. Gegeben seien ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum V der Dimension 4 mit Unterräumen V_1, V_2, V_3 der jeweiligen Dimension 1, 2, 3. Welche Möglichkeiten gibt es für

$$\dim((V_1 + V_2) \cap V_3)?$$

(a) Die Möglichkeiten $\{1, 2\}$
(b) Die Möglichkeiten $\{2, 3\}$
(c) Die Möglichkeiten $\{0, 1, 2\}$
(d) Die Möglichkeiten $\{1, 2, 3\}$

8. Welche der folgenden Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

9. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse der 5×5-Matrix

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

(e) Keine von diesen.

10. Welche der folgenden vier Eigenschaften ist **nicht** äquivalent zu der Definition eines Unterraumes U eines K-Vektorraumes V?

(a) $U \neq \varnothing \wedge \forall v, w \in U \, \forall \lambda, \mu \in K \ : \lambda v + \mu w \in U$.

(b) Es existiert eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $U = \mathrm{Kern}(f)$.

(c) Es existiert eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $U = \mathrm{Bild}(f)$.

(d) $U = \langle S \rangle$ für eine Teilmenge $S \subset V$.

(e) Alle sind äquivalent dazu.

11. Sei $\mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome. Wir bezeichnen mit $p'(X)$ die Ableitung von $p(X) \in \mathbb{R}[X]$. Welcher der folgenden Teilmengen ist ein Unterraum von $\mathbb{R}[X]$?

(a) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(X)^2 = X\}$

(b) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(0) = 1\}$

(c) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p''(X) = p'(X)\}$

(d) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(-2) \geq 0\}$

12. Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2, und sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ die geoordnete Basis von V mit

$$v_1 := (X+1)(X+1), \qquad v_2 := (X-1)(X+1), \qquad v_3 := (X-1)(X-1).$$

Was ist die Darstellung des Vektors $w := 8X$ bezüglich der Basis B?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

13. Welche der folgenden vier Aussagen über einen beliebigen Endomorphismus f eines beliebigen K-Vektorraums V ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) f besitzt genau einen Eigenwert in K.

(b) f ist Multiplikation mit einem Skalar.

(c) f bildet jeden eindimensionalen Unterraum von V in sich ab.

(d) f bildet jeden Unterraum von V in sich ab.

(e) Alle vier Aussagen sind äquivalent.

14. Welche der folgenden vier rationalen Matrizen ist **nicht** ähnlich zu den anderen?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(e) Alle sind zueinander ähnlich.

15. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für alle $n \geq 0$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $((n-i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sind ähnlich.

(c) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^k und B^k ähnlich für alle $k \geq 0$.

16. Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

(e) 8

17. Welche der folgenden Aussagen über eine beliebige $n \times n$-Matrix A ist korrekt?

(a) Die Anzahl der Eigenwerte von A ist kleiner oder gleich dem Rang von A.

(b) Wenn $A^2 = 0$ und A diagonalisierbar ist, dann ist $A = 0$.

(c) Wenn alle Eigenwerte von A gleich 0 sind, dann ist $A = 0$.

(d) Wenn A eine komplexe Diagonalmatrix ist, dann ist jeder Vektor in $\mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor.

18. Welche der folgenden vier Aussagen über die rationale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist **nicht** korrekt?

(a) Die Matrix ist invertierbar.

(b) Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat arithmetische Vielfachheit 2.

(c) $(1, 1, 1)^T$ ist ein Eigenvektor von A.

(d) Die Matrix ist diagonalisierbar.

(e) Alle Aussagen sind korrekt.

19. Sei $f\colon V \to W$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen. Welche der folgenden fünf Aussagen ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) f ist injektiv.

(b) Die duale Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ ist surjektiv.

(c) Das Nullelement von V ist das einzige Element, das auf das Nullelement von W abgebildet wird.

(d) Es existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

(e) Für jedes $v \in V \smallsetminus \{0\}$ existiert ein $\ell \in W^*$ mit $\ell(f(v)) \neq 0$.

(f) Alle fünf Aussagen sind äquivalent.

20. Für alle $i, j \geq 1$, sei

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } i \neq j \text{ ist .} \end{cases}$$

Was ist $\det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 100}$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 100

(e) Keines von diesen.

21. Welche der folgenden Aussagen ist **nicht** korrekt?

(a) Eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ eines Vektorraums V ist invariant unter Vertauschung genau dann, wenn $n \leq 1$ ist.

(b) Jeder Unterraum eines Vektorraums V ist der Kern einer linearen Abbildung $V \longrightarrow W$ für einen geeigneten Vektorraum W.

(c) Kein Unterraum ist sein eigenes Komplement.

(d) Jeder endlich-dimensionale Vektorraum ist eine direkte Summe von eindimensionalen Vektorräumen.

22. Wenn $3^{10} = 59049$ ist, was ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} ?$$

(a) $\begin{pmatrix} 29524 & 29525 \\ 29525 & 29524 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 59048 & 59050 \\ 59050 & 59048 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 59049 & 59050 \\ 59050 & 59049 \end{pmatrix}$

(e) Keine der obigen Matrizen