Lineare Algebra I

D-MATH, HS 2014

Prof. Richard Pink

Lineare Algebra I

Zwischenprüfung

9. Februar 2015

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **120 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Antworten werden auf dem beiliegenden Antwortzettel angekreuzt; das Aufgabenblatt können Sie mitnehmen.
- In jeder Aufgabe ist **genau eine Antwort richtig**. Ist diese und nur diese angekreuzt, so erhalten Sie **3 Punkte**. Ist keine Antwort oder sind mehrere Antworten angekreuzt, so erhalten Sie **0 Punkte**. Ist eine falsche Antwort und nur diese angekreuzt, so erhalten Sie **1 Minuspunkt**.
- Korrekturen auf dem Antwortblatt bitte mit Tipp-Ex durchführen.
- Hilfsmittel: Keine. (Insbesondere keine Zusammenfassung, keine Literatur, keine Notizen, keine elektronischen Hilfsmittel wie z.B. Taschenrechner, keine Kommunikationsmittel wie z.B. Handy.)

Viel Erfolg!

1. Welche der folgenden Definitionen ergibt einen Sinn? (Der Nutzen ist irrelevant.) Eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen $f\colon V \to W$ heisst

(a) *Antimorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v, w \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f(v+w) = f(v) + f(w)\ \wedge\ f(\lambda v) = \frac{f(v)}{\lambda}.$$

(b) *Polymorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v_1, v_2 \ldots \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f\big(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} v_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} f(v_i)\ \wedge\ f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

(c) *Unimorphismus*, wenn gilt:

$$\exists\, w \in W\ \forall\, v \in V\colon\ f(v+w) = w.$$

(d) *Affinomorphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, v, w \in V\ \forall\, \lambda \in K\colon\ f(v+\lambda w) = (1-\lambda) f(v) + \lambda f(v+w).$$

(e) *Retromorphismus*, wenn gilt:

$$\exists\, w \in W\ f(v) = w\ \forall\, v \in V.$$

Lösung: In (a) ist $\frac{f(v)}{\lambda}$ nicht definiert, wenn $\lambda = 0$ ist. In (b) ist die unendliche Reihe nicht definiert. In (c) ist es im allgemeinen nicht möglich, einen Vektor aus V und einen Vektor aus W zu addieren. In (e) ist die Reihenfolge der Quantoren unklar. Dagegen ist (d) eine wohlformulierte Aussage.

Tatsächlich ist (d) erfüllt für jede Abbildung der Form $f(v) = g(v) + w_0$ mit einem Homomorphismus $g\colon V \to W$ und einem Vektor $w_0 \in W$. Gilt $2 \neq 0$ in K, so ist umgekehrt jede Abbildung mit der Eigenschaft (d) von dieser Form. Der angegebene Name ist aber nicht gebräuchlich.

2. Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A+B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

(a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A+B)(B+A)$

(c) $(B+A)^2$

(d) $A(A+B) + B(A+B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$.

Lösung: Aus dem Kommutativ- und Assoziativgesetz der Matrixaddition und dem Distributivgesetz der Matrixaddition und -multiplikation folgt, dass alle Ausdrücke ausser (a) denselben Wert haben wie $(A+B)^2$. Der Ausdruck (a) ergibt nur dann denselben Wert, wenn $AB = BA$ ist.

3. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse der 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung: Wir haben

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist (a) die richtige Antwort.

4. Für welchen der gegebenen Werte von a besitzt das reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\,x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & a\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung?

(a) $a = 0$

(b) $a = 1$

(c) $a = 2$

(d) $a = \sqrt{2}$

Lösung: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Determinante $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. Die Gleichung hat daher eine nichttriviale Lösung genau dann, wenn $a = 1$ oder $a = -1$ ist. Somit ist (b) die *richtige Antwort.*

5. Die Dimension des Bildes der linearen Abbildung L_A für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

Lösung: Durch Zeilenumformungen erhält man $\mathrm{Rang}(A) = 3$*. Die Antwort (d) ist also richtig.*

6. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Matrix U über $\mathbb{Q}$ mit $UA = B$, so dass U

(a) eine obere Dreiecksmatrix ist.
(b) eine untere Dreiecksmatrix ist.
(c) eine Permutationsmatrix ist.
(d) eine nicht-invertierbare Matrix ist.

Lösung: Die Matrix A ist invertierbar, also muss

$$U = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sein; somit ist (b) und nur (b) richtig.

7. Gegeben seien ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum V der Dimension 4 mit Unterräumen V_1, V_2, V_3 der jeweiligen Dimension 1, 2, 3. Welche Möglichkeiten gibt es für

$$\dim((V_1 + V_2) \cap V_3)?$$

(a) Die Möglichkeiten $\{1, 2\}$
(b) Die Möglichkeiten $\{2, 3\}$
(c) Die Möglichkeiten $\{0, 1, 2\}$
(d) Die Möglichkeiten $\{1, 2, 3\}$

Lösung: Ist $V_1 \subset V_2$, so ist $V_1 + V_2 = V_2$ der Dimension 2*, andernfalls ist $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ der Dimension* 3*. Durch geeignete Wahl von V_1 und V_2 kann* *man so für* $V_{12} := V_1 + V_2$ *jeden Unterraum der Dimension* 2 *oder* 3 *erreichen. Sodann gilt*

$$\dim(V_{12} \cap V_3) = \dim(V_{12}) + \dim(V_3) - \dim(V_{12} + V_3).$$

Wegen $V_3 \subset V_{12} + V_3 \subset V$ *gilt* $3 = \dim(V_3) \leq \dim(V_{12} + V_3) \leq \dim(V) = 4$, *und zwar* $\dim(V_{12} + V_3) = 3$ *im Fall* $V_{12} \subset V_3$ *und andernfalls* $= 4$. *Wegen* $V_{12} \neq 0$ *kann man bei gegebenem* V_{12} *jeden der Fälle erreichen durch geeignete Wahl von* V_3. *Somit sind die Möglichkeiten genau*

$$\dim(V_{12} \cap V_3) = (2 \text{ oder } 3) + 3 - (3 \text{ oder } 4) = (1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3),$$

und die richtige Antwort ist (d).

8. Welche der folgenden Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Lösung: Für jeden Fall bilde die Matrix A *deren Spalten aus den gegeben Vektoren besteht. Die Vektoren sind linear unabhängig genau dann, wenn* $\det(A) \neq 0$

ist. Man findet so die korrekte Antwort (a).

9. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse der 5×5-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Keine von diesen.

Lösung: Die Matrix der Aufgabe ist eine Permutationsmatrix. Damit ist ihre Inverse gleich ihrer Transponierten; die Antwort (d) ist korrekt.

10. Welche der folgenden vier Eigenschaften ist **nicht** äquivalent zu der Definition eines Unterraumes U eines K-Vektorraumes V?

(a) $U \neq \varnothing \wedge \forall v, w \in U \, \forall \lambda, \mu \in K \, : \lambda v + \mu w \in U.$

(b) Es existiert eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $U = \mathrm{Kern}(f)$.

(c) Es existiert eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $U = \mathrm{Bild}(f)$.

(d) $U = \langle S \rangle$ für eine Teilmenge $S \subset V$.

(e) Alle sind äquivalent dazu.

Lösung: Man prüft direkt, dass die Aussage (a) äquivalent zu der Definition eines Unterraumes ist (siehe Kapitel 4 in der Zusammenfassung). Der Kern und das Bild einer linearen Abbildung, sowie die linare Erzeugnis einer Teilmenge von V sind ein linearer Unterraum; also sind die in (b), (c), (d) definierten Mengen U Unterräume von V.
Sei umgekehrt angenommen, dass U ein Unterraum von V ist und sei U' eine beliebiges Komplement. Wir bezeichnen mit P_U bzw. $P_{U'}$ die induzierte Projektion auf U bzw. U'. Dann ist $U = \mathrm{Kern}(P_{U'})$ und $U = \mathrm{Bild}(P_U)$ und U erfüllt die Aussagen in (b) und (c). Da $U = \langle U \rangle$ ist, gilt auch (d). Somit sind alle Aussagen äquivalent und Antwort (e) ist korrekt.

11. Sei $\mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome. Wir bezeichnen mit $p'(X)$ die Ableitung von $p(X) \in \mathbb{R}[X]$. Welcher der folgenden Teilmengen ist ein Unterraum von $\mathbb{R}[X]$?

(a) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(X)^2 = X\}$
(b) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(0) = 1\}$
(c) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p''(X) = p'(X)\}$
(d) $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(-2) \geq 0\}$

Lösung: Die Menge in (a) ist leer und damit kein Unterraum. Die Menge in (b) enthält nicht die Nullfunktion $p(X) = 0$ und die Menge in (d) enthält $p(X) = 1$, aber nicht $-p(X)$; somit sind beides keine Unterräume. Also kann nur (c) die korrekte Antwort sein.

In der Tat ist (c) korrekt: Die angegebene Menge ist der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \quad p(X) \to p'(X) - p''(X),$$

und daher ein Unterraum.

12. Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2, und sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ die geordnete Basis von V mit

$$v_1 := (X+1)(X+1), \qquad v_2 := (X-1)(X+1), \qquad v_3 := (X-1)(X-1).$$

Was ist die Darstellung des Vektors $w := 8X$ bezüglich der Basis B?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung: Wir haben $8X = 2v_1 - 2v_3$. Damit ist Antwort (c) korrekt.

13. Welche der folgenden vier Aussagen über einen beliebigen Endomorphismus f eines beliebigen K-Vektorraums V ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) f besitzt genau einen Eigenwert in K.
(b) f ist Multiplikation mit einem Skalar.
(c) f bildet jeden eindimensionalen Unterraum von V in sich ab.

(d) f bildet jeden Unterraum von V in sich ab.

(e) Alle vier Aussagen sind äquivalent.

Lösung: Ist f die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in K$, so ist λ der einzige Eigenwert von f, aber nur, wenn $V \neq 0$ ist. Somit gilt die Implikation (b)$\Rightarrow$(a) zwar fast, aber eben im allgemeinen nicht. Auch die Umkehrung (a)$\Rightarrow$(b) gilt im allgemeinen nicht, da ein Eigenwert mit geometrischer Multiplizität kleiner als der arithmetischen Multiplizität auftreten kann, z.B. für die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Daraus folgt jedenfalls schon, dass die richtige Antwort (a) oder (b) ist.

Die Implikation (b)$\Rightarrow$(d) sieht man direkt. Die Implikation (d)$\Rightarrow$(c) ist lediglich der Übergang zu einem Spezialfall.

Schliesslich nehmen wir (c) an. Ist $V = 0$, so ist f zum Beispiel gleich der Multiplikation mit dem Skalar 0. Andernfalls wähle $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig, und sei $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda v$. Für jedes $w \in V$ gilt dann entweder $w \in \langle v \rangle$ und somit $f(w) = \lambda w$, oder w ist linear unabhängig von v. Im letzteren Fall existieren $\mu, \nu \in K$ mit $f(w) = \mu w$ und $f(v+w) = \nu \cdot (v+w)$. Aus Koeffizientenvergleich folgert man dann $\mu = \nu = \lambda$. Also ist f gleich der Multiplikation mit dem Skalar λ. Beide Fälle zusammen zeigen also die Implikation (c)$\Rightarrow$(b).

Insgesamt sind daher (b), (c) und (d) äquivalent, aber nicht äquivalent zu (a). Somit ist (a) die korrekte Antwort.

14. Welche der folgenden vier rationalen Matrizen ist **nicht** ähnlich zu den anderen?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(e) Alle sind zueinander ähnlich.

Lösung: Die Matrizen in (b) und (d) haben beide die Eigenwerte 1 und 0. Sie lassen sich daher zu der Matrix in (a) diagonalisieren. Es folgt, dass die Matrizen in (a), (b) und (d) ähnlich zueinander sind. Dagegen ist die Matrix in (c) *invertierbar, hat also nicht den Eigenwert* 0*. Damit ist (c) die korrekte Antwort.*

15. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für alle $n \geq 0$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $((n-i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sind ähnlich.

(c) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^k und B^k ähnlich für alle $k \geq 0$.

Lösung: Aussage (a) ist falsch, denn auch die Nullmatrix ist nur zu sich selbst ähnlich. In (b) sind beides Diagonalmatrizen; ihre Diagonaleinträge sind also ihre Eigenwerte. Für die erste Matrix sind dies $(i)_{1 \leq i \leq n} = (1, 2, \ldots, n)$*; für die zweite* $(n-i)_{1 \leq i \leq n} = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$*. Also hat die zweite Matrix den Eigenwert* 0*, die erste aber nicht; somit sind sie nicht ähnlich. Aussage (c) ist falsch, denn zum Beispiel haben die beiden Matrizen* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *dasselbe charakteristische Polynom, sind aber nicht ähnlich. Aussage (d) ist richtig: Aus* $A = UBU^{-1}$ *für eine invertierbare Matrix* U *folgt* $A^k = UB^kU^{-1}$ *für alle* $k \geq 0$*. Die richtige Lösung ist also (d).*

16. Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

(e) 8

Lösung: Subtrahiere die erste Zeile von der zweiten, dann die zweite von der dritten, ..., und schlussendlich die vierte von der letzten. Wir erhalten eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $1, 2, 3/2, 5/3, 8/5$*. Es folgt, dass die Determinante* 8 *ist. Damit ist Teil (e) korrekt.*

17. Welche der folgenden Aussagen über eine beliebige $n \times n$-Matrix A ist korrekt?

(a) Die Anzahl der Eigenwerte von A ist kleiner oder gleich dem Rang von A.

(b) Wenn $A^2 = 0$ und A diagonalisierbar ist, dann ist $A = 0$.

(c) Wenn alle Eigenwerte von A gleich 0 sind, dann ist $A = 0$.

(d) Wenn A eine komplexe Diagonalmatrix ist, dann ist jeder Vektor in $\mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor.

Lösung: Für $n \geq 1$ ist der Rang der Nullmatrix 0, aber sie besitzt den Eigenwert 0; also ist (a) falsch. Angenommen A ist diagonalisierbar, also $A = UDU^{-1}$ für eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und für eine invertierbare Matrix U. Wegen $D^2 = U^{-1}A^2U = 0$ gilt $\lambda_i^2 = 0$ für alle i und somit $\lambda_i = 0$ und $A = 0$. Antwort (b) ist also korrekt.

Antwort (c) ist falsch: Der einzige Eigenwert der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ ist gleich 0. Auch (d) ist falsch: Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist eine komplexe Diagonalmatrix, aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist kein Eigenvektor.

18. Welche der folgenden vier Aussagen über die rationale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist **nicht** korrekt?

(a) Die Matrix ist invertierbar.

(b) Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat arithmetische Vielfachheit 2.

(c) $(1, 1, 1)^T$ ist ein Eigenvektor von A.

(d) Die Matrix ist diagonalisierbar.

(e) Alle Aussagen sind korrekt.

Lösung: Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4\,.$$

Insbesondere ist $\det(A) = 4 \neq 0$; also ist A invertierbar. Sodann hat P_A die Nullstelle $\lambda = 1$, und durch Polynomdivision erhält man

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert der arithmetischen Vielfachheit 2. Durch Einsetzen erhält man weiter, dass $(1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist. Um (d) zu überprüfen, bestimmt man den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$:

$$\mathrm{Kern}(A - I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \big\langle (1, -1, 0)^T, (0, 1, -1)^T \big\rangle.$$

Also hat der Eigenwert die geometrische Vielfachheit 2. Somit existiert eine Basis aus Eigenvektoren, und A ist diagonalisierbar. Daher sind alle Aussagen korrekt, und die richtige Antwort ist (e).

19. Sei $f\colon V \to W$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen. Welche der folgenden fünf Aussagen ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) f ist injektiv.

(b) Die duale Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ ist surjektiv.

(c) Das Nullelement von V ist das einzige Element, das auf das Nullelement von W abgebildet wird.

(d) Es existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

(e) Für jedes $v \in V \smallsetminus \{0\}$ existiert ein $\ell \in W^*$ mit $\ell(f(v)) \neq 0$.

(f) Alle fünf Aussagen sind äquivalent.

Lösung: Die Aussage (d) ist äquivalent zur Surjektivität von f, aber nicht zur Injektivität, also nicht zu (a). Dagegen ist (a) ist äquivalent zu $\mathrm{Kern}(f) = 0$, *also zu (c). Wenn die Aufgabe korrekt gestellt ist, kann somit nur (d) die richtige Antwort sein.*

Tatsächlich wurde die Äquivalenz von (a) und (b) in Aufgabe 17 der Wiederholungsserie gezeigt. Schliesslich ist ein Element $w \in W$ ungleich Null genau dann, wenn ein $\ell \in W^*$ existiert mit $\ell(w) \neq 0$. Also ist (e) äquivalent zu $\forall v \in V \smallsetminus \{0\}\colon f(v) \neq 0$, und folglich ebenfalls zu (a).

20. Für alle $i, j \geq 1$, sei

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } i \neq j \text{ ist}\,. \end{cases}$$

Was ist $\det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 100}$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 100

(e) Keines von diesen.

Lösung: Sei $n \geq 1$ beliebig, und betrachte $A_n := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit den angegebenen a_{ij}. Sei B_n die Matrix, die aus A_n durch Subtrahieren der ersten Zeile von allen übrigen Zeilen entsteht. Sei C_n die Matrix, die aus B_n durch Subtrahieren der zweiten bis zur letzten Spalte von der ersten Spalte entsteht. Dann ist C_n eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $n-1, -1, \ldots, -1$. Es folgt

$$\det A_n = \det C_n = (-1)^{n-1}(n-1)\,.$$

Insbesondere ist damit $\det(A_{100}) = -99$ *und somit (e) richtig.*

21. Welche der folgenden Aussagen ist **nicht** korrekt?

(a) Eine geordnete Basis $(v_1, \dots, v_n)$ eines Vektorraums V ist invariant unter Vertauschung genau dann, wenn $n \leq 1$ ist.

(b) Jeder Unterraum eines Vektorraums V ist der Kern einer linearen Abbildung $V \longrightarrow W$ für einen geeigneten Vektorraum W.

(c) Kein Unterraum ist sein eigenes Komplement.

(d) Jeder endlich-dimensionale Vektorraum ist eine direkte Summe von eindimensionalen Vektorräumen.

Lösung: Aussage (a) ist korrekt, da die Vektoren in jeder geordneten Basis paarweise verschieden sind. Aussage (b) ist korrekt, denn jeder Unterraum V' *von* V *besitzt ein Komplement* V''*, und dann ist die Projektionsabbildung* $V = V' \oplus V'' \to V''$, $v' + v'' \mapsto v''$ *eine lineare Abbildung mit Kern* V'*. Aussage (c) ist nicht korrekt, da für den Nullraum* $V = 0$ *gilt* $V = V \oplus V$*, also ist dort* V *sein eigenes Komplement in* V*. Aussage (d) ist korrekt, denn für jede geordnete Basis* $(b_1, \dots, b_n)$ *eines Vektorraums* V *ist* $V = \langle b_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle b_n \rangle$*. Somit ist Antwort (c) richtig.*

22. Wenn $3^{10} = 59049$ ist, was ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} ?$$

(a) $\begin{pmatrix} 29524 & 29525 \\ 29525 & 29524 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 59048 & 59050 \\ 59050 & 59048 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 59049 & 59050 \\ 59050 & 59049 \end{pmatrix}$

(e) Keine der obigen Matrizen

Lösung: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *hat die einfachen Eigenwerte* 3 *und* -1 *zu den jeweiligen Eigenvektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Die Matrix* A *ist daher diagonalisierbar und wir haben*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{10}+1 & 3^{10}-1 \\ 3^{10}-1 & 3^{10}+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist Antwort (b) korrekt.