Prüfung - Korrekturschema

Frage 1 (3 Punkte)**.** Wie viele Elemente haben die folgenden Mengen? Einzig die Antwort zählt.

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) \cup \{\varnothing\}$ (b) $\mathcal{P}(\{1,2,3\} \triangle \{3,4,5\})$ (c) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \triangle \mathcal{P}(\{3,4,5\})$

`Antworten:` (a): 4, (b): 16, (c): 12
`Je 1 Punkt pro richtige Antwort. Falls bei` (b) `als Antwort` 2^4`, oder bei` (c) `die Antwort` $16-2-2$ `oder ähnliches steht, gilt das als richtig.`

Frage 2 (3 Punkte)**.** Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einzig die Antwort zählt.

$$(a)\ \frac{1}{3+5i} \qquad (b)\ (1+i)^6 \qquad (c)\ \frac{1+4i}{3+5i}$$

`Antworten:` (a): $\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$, (b): $0-8i$, (c): $\frac{23}{34} + \frac{7}{34}i$.
`Je 1 Punkt pro richtige Antwort. Auch akzeptabel:` $\frac{1}{34}(3-5i)$, $-8i$.

Frage 3 (3 Punkte)**.** Definieren Sie, was ein *angeordneter Körper* ist. Sie dürfen dabei die Begriffe *Körper* und *Ordnungsrelation* als bekannt voraussetzen.

`Folgende vier Teile muss die Definition beinhalten:`

(1) Ein angeordneter Körper ist ein Körper K, zusammen mit einer Ordnungsrelation $\leq$ auf K derart, dass ... `oder alternativ:` Ein angeordneter Körper ist ein Paar $(K, \leq)$ wobei K ein Körper und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf K ist, derart, dass
(2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$
(3) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \leq y \implies x+z \leq y+z$
(4) Für alle $x, y \in K$ gilt $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \implies 0 \leq xy$

`3 Punkte falls alle vier Teile korrekt, je 1 Punkt Abzug pro fehlenden oder falschen Teil (0 Punkte falls alles falsch). Auch korrekt falls die Axiome` (2), (3), (4) `in Worten ausgeschrieben sind. Auch korrekt falls` (3) `oder` (4) `mit strikten Ungleichungen (gibt äquivalente Definition).`

Frage 4 (4 Punkte)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Definieren Sie *Stetigkeit* und *gleichmässige Stetigkeit* für reellwertige Funktionen auf I.

`1 Punkt für ein korrektes Setup, algemein:` Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion `oder` Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst stetig (`bezw.` gleichmässig stetig). `kein Punkt, falls einfach von` f `gesprochen wird, ohne zu sagen was` f `ist.`

`Def. Von Stetigkeit: 1 Punkt für korrektes Setup:` Für alle $x_0 \in I \ldots$, `oder es wird zuerst Stetigkeit in einem Punkt definiert, und dann` ...f ist stetig, falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in I$ ist.

`Def. Von Stetigkeit: 1 Punkt für:` $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so, dass für alle $x \in I$

$$|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. `oder selbes in Worten ausgeschrieben.`

`Def. Von gleichm. Stetigkeit: 1 Punkt für:` $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so, dass für alle $x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt. `oder selbes in Worten ausgeschrieben.`

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Sei X eine endliche Menge, und sei $f : X \longrightarrow X$ eine Bijektion. Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ bezeichne $f^{\circ n}$ die n-fache Iteration der Funktion f, also $f^{\circ 1} = f$, $f^{\circ 2} = f \circ f$, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$ et cetera. Beweisen Sie folgende Aussage:

Es gibt eine ganze Zahl $N \geq 1$ mit der Eigenschaft $f^{\circ N} = \mathrm{id}_X$.

`Der Beweis sollte grob in folgenden Schritten ablaufen.`

(1) Die Menge aller Bijektionen $B = \{h : X \longrightarrow X \mid h \text{ ist bijektiv}\}$ ist endlich.
(2) Die Elemente $f^{\circ 1}, f^{\circ 2}, f^{\circ 3}, \ldots$ von B können deshalb nicht alle voneinander verschieden sein. Es gibt also ganze Zahlen $m \geq 1$, $n \geq 1$ mit $m > n$ und $f^{\circ m} = f^{\circ n}$.
(3) Sei g die zu f inverse Funktion. Dann gilt $f \circ g = \mathrm{id}_X$, und folglich (Induktion) $f^{\circ k} \circ g^{\circ k} = \mathrm{id}_X$ für alle $k \geq 1$.
(4) Aus (2) und (3) erhält man

$$f^{\circ m} = f^{\circ n} \implies f^{\circ (m-n)} \circ f^{\circ n} \circ g^{\circ n} = f^{\circ n} \circ g^{\circ n} \implies f^{\circ (m-n)} = \mathrm{id}_X$$

Die Aussage gilt also für $N = m - n$.

`Punktevergabe: Je 1 Punkt für`

(1) Die Menge aller Bijektionen B `diese Menge betrachtet oder benannt.`
(2) ist endlich. `so behauptet (gilt als klar, ohne Beweis).`
(3) Die Elemente ... nicht alle verschieden. `so gesagt`
(4) Es gibt $m > n$ mit $f^{\circ m} = f^{\circ n}$. `Gleichung so aufgestellt`

(5) Inverse Funktion g... `diese betrachtet oder benannt.`
(6) $f^{\circ k} \circ g^{\circ k} = \mathrm{id}_X$ für alle $k \geq 1$. `so behauptet (klar, ohne Induktionsbeweis).`
(7) Aus (2) und (3) erhält man `so kombiniert.`
(8) Die Aussage gilt also für $N = m - n$. `Schluss sauber geschrieben.`

`Bei Alternativen Lösungen sollen Punkte möglichst analog erteilt werden.`
`Für unsaubere oder interpretationsbedürftige Formulierungen gibt es keine Punkte.`

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

`Der einfachste Beweis erfolgt durch Widerspruch.`

(1) Angenommen f sei stetig, injektiv aber nicht streng monoton. Dann existierten Elemente $a < b < c$ in I mit $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ oder mit $f(a) \geq f(b) \leq f(c)$.
(2) Wir nehmen an es gelte $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$, der andere Fall kann analog behandelt werden.
(3) Da $a \neq b$ und f injektiv ist, gilt $f(a) < f(b)$, und genauso $f(b) > f(c)$ und genauso $f(a) \neq f(c)$.
(4) Es gilt $f(a) < f(c)$ oder $f(a) > f(c)$. Wir nehmen an es gelte $f(a) < f(c)$, der andere Fall kann analog behandelt werden.
(5) Es gilt nun $f(a) < f(c) < f(b)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein $x \in (a, b)$ existiert, mit $f(x) = f(c)$.
(6) Wegen $a < b < c$ gilt $x \neq c$ einerseits, und $f(x) = f(c)$ andererseits. Also ist f nicht injektiv. Widerspruch!

`Jeder Beweisschritt in diesem Ablauf gibt einen Punkt. Korrektes Anwenden des Zwischenwertsatzes in (5) gibt zwei Punkte. Zusätzlich gibt es einen Punk für sauberen und übersichtlichen Aufschrieb, mit erklärenden und einigermassen vollständigen Sätzen.`
`Bei Alternativen Lösungen sollen Punkte möglichst analog erteilt werden.`
`Für unsaubere oder interpretationsbedürftige Formulierungen gibt es keine Punkte.`