Übungsserie 1

Zur Abgabe am 1. Oktober: Aufgaben 1,3,4,6,8

Aufgabe 1. Sei X eine endliche Menge mit n Elementen, und sei Y eine endliche Menge mit m Elementen.

(1) Wie viele Funktionen von X nach Y gibt es?
(2) Wie viele injektive Funktionen von X nach Y gibt es?
(3) Wie viele bijektive Funktionen von X nach Y gibt es?

Aufgabe 2 (Challenge!)**.** Sei X eine endliche Menge mit n Elementen, und sei Y eine endliche Menge mit m Elementen. Wie viele surjektive Funktionen von X nach Y gibt es? Die korrekte Antwort lautet: 0 falls $n < m$, und

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

falls $n \geq m$. Hier steht $\binom{m}{k}$ für den Binomialkoeffizienten $\frac{m!}{k!(m-k)!}$. Googlen Sie *Stirling number of the second kind.*

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X, \ A \longmapsto \mathbb{1}_A,$$

die einer Teilmenge $A \subseteq X$ deren charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ zuordnet. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Arten, dass Φ bijektiv ist:

(1) indem Sie direkt verifizieren, dass Φ injektiv und surjektiv ist.
(2) indem Sie explizit eine Umkehrabbildung angeben.

Angenommen die Menge X sei endlich, mit n Elementen. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge X? Wie viele Elemente hat die Menge $\{0,1\}^X$?

Erinnerung: Mit Y^X bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $X \to Y$. Hier ist also speziell $\{0,1\}^X$ die Menge aller Abbildungen $X \to \{0,1\}$.

Aufgabe 4. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, derart dass

$$a \sim (a+5) \qquad \text{und} \qquad a \sim (a+8)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt $1 \sim 2$? Wie viele Elemente hat der Quotient $\mathbb{N}/\!\sim$?

Aufgabe 5. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

(1) nur die Symmetrie;
(2) nur die Transitivität;
(3) die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

erfüllt.

Aufgabe 6. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Überprüfen Sie, dass die Relation $\equiv$ auf der Menge $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$a \equiv b \iff a - b \text{ ist teilbar durch } n$$

eine Äquivalenzrelation ist, und erstellen Sie eine Liste aller Äquivalenzklassen. Die Quotientenmenge wird üblicherweise als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ notiert, gelesen $\mathbb{Z}$ *modulo* n. Zeigen Sie dass auf der Quotientenmenge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine binäre Operation $+$ existiert, die für Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ durch

$$[a] + [b] = [a + b]$$

gegeben ist. Ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit dieser Operation und $[0]$ als neutrales Element ein kommutativer Monoid?

Aufgabe 7 (Übung zum Schreibstil)**.** Sie kennen sicher die Neunerregel: *Eine natürliche Zahl ist genau dan durch* 9 *teilbar falls ihre Quersumme (in Dezimalschreibweise) durch 9 teilbar ist.* Schreiben Sie einen Beweis dieser Aussage so wie er Ihrer Meinung nach in einem Lehrbuch stehen sollte, also mit besonderem Augenmerk auf Lesbarkeit und guten Schreibstil. Vergleichen Sie Ihren Text mit dem Ihrer Mitstudenten und tauschen Sie Meinungen aus.

Aufgabe 8. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit der symmetrischen Differenz als binäre Operation und der leeren Menge als neutrales Element einen kommutativen Monoiden bildet. Bevor Sie mit dem eigentlichen Beweis beginnen, erstellen Sie eine Liste aller Aussagen die überprüft werden müssen.

Aufgabe 9 (Recherche)**.** Finden Sie heraus und erklären Sie in eigenen Worten, was die folgende Aussage bedeutet: *Der Monoid der positiven ganzen Zahlen mit Multiplikation ist ein freier kommutativer Monoid, erzeugt von den Primzahlen.*

Allgemeine Informationen sind unter:
`https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-1261-07L/`