Übungsserie 3

Zur Abgabe am 15. Oktober: Aufgaben 2,3,5,7,12

Aufgabe 1. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K$ die Ungleichung

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

gilt. In welchen Fällen gilt Gleichheit?

Aufgabe 2. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass

$$x \leq y \iff x^3 + x \leq y^3 + y$$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und seien $x, y, z \in K$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt.

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Aufgabe 4 (Challenge)**.** Finden Sie einen angeordneten Körper $(K, \leq)$ der ein Element $x \in K$ enthält, mit der Eigenschaft dass $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
Hinweis: Der Körper den Sie suchen darf schon einmal nicht ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ sein. Beginnen Sie also damit, zu den reellen Zahlen formell ein Element t hinzuzufügen und damit einen Körper $K = \mathbb{R}(t)$ zu definieren. Stichwort für Recherche: *rational function*. Interpretieren Sie Elemente von $\mathbb{R}(t)$ als Funktionen in der Variablen t, und nutzen Sie diese Interpretation um $\mathbb{R}(t)$ zu ordnen : Für $f, g \in \mathbb{R}(t)$ deklarieren Sie $f \geq g$ falls es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(t) \geq g(t)$ für alle $t \geq t_0$. Folgern Sie $n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5. Sei $\mathbb{R}$ ein Körper reeller Zahlen, und sei $u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Element $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $c^3 + c = u$. Benutzen Sie dabei die Folgerung aus Aufgabe 2. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sagen, die durch $f(x) = x^3 + x$ gegeben ist?

Aufgabe 6 (Übung zum Schreibstil)**.** Versuchen Sie, eine dreidimensionale Variante der komplexen Zahlen zu definieren, also einen Körper $\mathbb{D}$ mit Elementen die informell als

$$z = a + bi + cj$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Nachdem sie sich davon überzeugt haben dass das irgendwie nicht geht, formulieren Sie eine mathematisch präzise Vermutung. Schreiben Sie eine kurze Nachricht an einen Professor um zu fragen ob sie/er etwas über Ihre präzis formulierte Vermutung weiss und weiterhelfen kann. Ihr Professor kennt die komplexen Zahlen, weiss aber sonst nicht um was es geht.

Aufgabe 7. Finden Sie alle komplexen Zahlen c mit der Eigenschaft $c^3 + c = 0$. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sagen, die durch $f(z) = z^3 + z$ gegeben ist?

Aufgabe 8. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a)	$z = (4 + 3i)(2 - i)$	(c)	$z = \frac{4+3i}{2-i}$	(e)	$z^3 = i$
(b)	$z = (2 - i)^3$	(d)	$z = \frac{2-i}{4+3i}$	(f)	$z^2 + 3 + 4i = 0$

Aufgabe 9. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der Komplexen Ebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 3, \; |z| \leq 3, \; |z - i| \leq 3\}$
(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z + 1) = \mathrm{Re}(z + iz), \; |z| \leq 2\}$
(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1, \; \left|\frac{z}{z-1}\right| < 1\}$

Aufgabe 10. Stellen Sie eine Liste von Ungleichungen zusammen, wobei Sie auch die Funktionen Re, Im und $|\cdot|$ benutzen dürfen, mit der Eigenschaft dass die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ die diese Ungleichungen erfüllen ein ausgefülltes gleichseitiges Dreieck in der komplexen Ebene bildet. Wie viele Ungleichungen brauchen Sie? Können Sie auch ohne die Funktionen Re und Im auskommen?

Aufgabe 11 (Übung zum Schreibstil)**.** Ein Dreieck mit Seitenlängen 3, 4 und 5 ist rechtwinklig, da $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt. Man nennt ein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) *primitives pythagoräisches Tripel* falls $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, und der grösste gemeinsame Teiler von a, b, c gleich 1 ist. Demnach ist $(3, 4, 5)$ so ein pythagoräisches Tripel. Ein weiteres Beispiel liefert die Gleichung

$$91004468168113^2 + 28515500892816^2 = 95367431640625^2$$

Zeigen Sie dass es unendlich viele primitive pythagoräische Tripel gibt. Die komplexe Zahl $3 + 4i$ kann dabei helfen. Produzieren Sie einen kurzen Text über das Thema, der für eine Zeitschrift für Gymnasialstudenten bestimmt ist.

Aufgabe 12. Wir betrachten die komplexen Zahlen $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ und $w = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 + i)$. Überprüfen Sie dass $|z| = 1$ und $|w| = 1$ gilt, und zeichnen Sie die ungefähre Position von z und w in der Komplexen Ebene.

(1) Mit Maschinenhilfe, berechnen Sie $z, z^2, z^3, z^4, \dots$ sowie $w, w^2, w^3, w^4, \dots$ und zeichnen diese Punkte in der Komplexen Ebene.

(2) Berechnen Sie z^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Formulieren Sie eine Vermutung über die Menge $\{w^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und beweisen Sie davon was Sie können.

Aufgabe 13 (Recherche)**.** Für diese Aufgabe benötigen Sie einen Computer und etwas Programmierfähigkeit. Sei $c \in \mathbb{C}$ eine fixe komplexe Zahl, und sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die durch $f(z) = z^2 - c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Wir definieren die *Iterationen* von f durch

$$f^{\circ 2} = f \circ f, \quad f^{\circ 3} = f \circ f \circ f, \quad \dots, \quad f^{\circ n} = f^{\circ (n-1)} \circ f$$

also zum Beispiel gilt $f^{\circ 2}(z) = (z^2 - c)^2 - c$ und $f^{\circ 2}(z) = ((z^2 - c)^2 - c)^2 - c$ und so fort. Wir interessieren uns für die Menge

$$J_c := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} : \; |f^{\circ n}(z)| \leq 2 \right\}$$

Die Menge J_c heisst *Julia Menge* mit Parameter c.

(1) Fixieren Sie $c = -0.75+0.11i$, und zeichnen Sie $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |f^{\circ n}(z)| \leq 2 \right\}$ für $n = 1, 2, 3, 4$

(2) Durchlaufen Sie Pixel mit geeignet skalierten Koordinaten $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ und prüfen Sie für $n = 1, 2, 3, \dots$ ob $|f^{\circ n}(x + yi)| \leq 2$ gilt. Falls das für alle $n \geq 1$ bis hin zu einer grossen Zahl N (Grössenordnung 1000, stellvertretend für unendlich) gilt, so färben Sie das Pixel schwarz, ansonsten brechen Sie ab und färben das Pixel weiss. Experimentieren Sie mit anderen Parametern, oder einer anderen Funktion anstelle von f.

Die Ausgabe für $c = -0.75 + 0.11i$ sollte in etwa so aussehen: