Übungsserie 4

Zur Abgabe am 22. Oktober: Aufgaben 1,3,5,6,8

Aufgabe 1. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, y \in X$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq c \leq y \implies c \in X$. Zeigen Sie, dass X ein Intervall ist. Folgern Sie daraus, dass ein beliebiger Durchschnitt von Intervallen wiederum ein Intervall ist.

Aufgabe 2. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und seien r_1, r_2 positive reelle Zahlen. Zeigen Sie:

$$B(z_1, r_1) = B(z_2, r_2) \quad \iff \quad z_1 = z_2 \text{ und } r_1 = r_2$$

Aufgabe 3. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und seien r_1, r_2 positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass es für alle $z \in B(z_1, r_1) \cap B(z_2, r_2)$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$B(z, r) \;\subseteq\; B(z_1, r_1) \cap B(z_2, r_2)$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ wiederum offen in $\mathbb{C}$ sind (vgl. analoge Aussage für offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ in der Vorlesung).

Aufgabe 4. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Angenommen die folgende Aussage sei wahr: *Ist $X \subseteq K$ eine nicht leere, von oben beschränkte Teilmenge von K, dann existiert ein Element $x_0 \in K$ mit der Eigenschaft*

$$x \leq x_0 \text{ für alle } x \in X \qquad \text{und} \qquad (x_1 \in K \text{ und } x \leq x_1 \text{ für alle } x \in X) \implies x_0 \leq x_1$$

Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme der angeordnete Körper K vollständig ist, also das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 5. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

nach oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Welche Konventionen für das Symbol ∞ brauchen Sie, falls X oder Y unbeschränkt ist?

Aufgabe 6. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge die offen und abgeschlossen ist. Zeigen sie dass $X = \varnothing$ oder $X = \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Nehmen Sie an X sei nicht leer, wählen Sie $x \in X$, und studieren Sie die Menge der reellen Zahlen $r > 0$ mit der Eigenschaft $(x - r, x + r) \subseteq X$.

Aufgabe 7 (Challenge)**.** Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge die offen und abgeschlossen ist. Zeigen sie dass $X = \varnothing$ oder $X = \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 8. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(2) $(F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_2 \in \mathcal{F}) \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

nicht leer ist.

Aufgabe 9 (Recherche und Schreibstil)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Studiert man den Beweis der Aussage dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, so realisiert man, dass hier eigentlich die Existenz einer rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$$

gezeigt wird. Fragen zu Annäherung von reellen Zahlen durch rationale Zahlen sind Fragestellungen der **Diophantischen Approximation**. Wir können hier auf elementare Weise ein stärkeres Resultat zeigen, Dirichlet's Approximationssatz.

Satz: *Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle, nicht rationale Zahl, und sei $Q \geq 1$ eine natürliche Zahl. Es existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq Q$, die*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$$

und insbesondere $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ erfüllen.

Finden Sie einen Beweis dieses Satzes, falls notwendig recherchieren Sie im Internet, und schreiben Sie einen Beweis in eigenen Worten auf. Finden Sie heraus wozu dieser Satz gebraucht werden kann. Recherchieren Sie wer Klaus Roth ist, und was der **Satz von Roth** besagt.

Aufgabe 10 (Challenge)**.** Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ nennt man **kompakt**, falls X abgeschlossen und beschränkt ist. Für zwei kompakte Teilmengen X und Y von $\mathbb{R}$ definieren wir die **Hausdorff Distanz** $d(X,Y)$ von X nach Y wie folgt: Zuerst, definiere

$$\begin{aligned} d(x_0, Y) &:= \inf(\{|x_0 - y| \mid y \in Y)\} \qquad\qquad \text{und} \\ d(X, y_0) &:= \inf(\{|x - y_0| \mid x \in X)\} \end{aligned}$$

für feste $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Dann, setze

$$d(X,Y) = \max\Big\{ \sup\{d(x_0,Y) \mid x_0 \in X\}, \sup\{d(X,y_0) \mid y_0 \in Y\}\Big\}$$

Machen Sie sich mit der Definition vertraut, in dem Sie die Hausdorff Distanz $d(X,Y)$ zwischen beschränkten Intervallen $X = [a,b]$ und $Y = [c,d]$ explizit ausrechnen. Dann, zeigen Sie folgende Eigenschaften der Hausdorff Distanz:

(1) $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$ - hier müssen Sie benutzen dass X und Y kompakt sind.
(2) $d(X,Y) = d(Y,X)$.
(3) $d(X,Y) + d(X,Z) \geq d(X,Z)$ für alle kompakten Teilmengen X, Y, Z von $\mathbb{R}$.

Schreiben Sie Ihre Beweise möglichst so, dass sie direkt auch auf kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$ übertragen werden können.