Übungsserie 5

Zur Abgabe am 29. Oktober: Aufgaben 1,4,5,7,8,10

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch $f(x) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 2. Seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ mit } n \text{ und } m \text{ teilerfremd} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

In welchen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ ist f, beziehungsweise g stetig? Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}$ ist die Charakteristische Funktion $\mathbb{1}_X$ stetig?

Aufgabe 3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

(b) Sei $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig Abbildung so dass $g(0) = g(2)$ gilt. Zeigen Sie, dass $x_0 \in [0,2]$ existiert, welches $g(x_0) = g(x_0+1)$ erfüllt.

Aufgabe 4. Sei I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

Aufgabe 5. Sei I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so dass für alle $a, b \in I$ und $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b existiert, welches $f(x) = \xi$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 6. Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die die Beziehung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Gibt es Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die diese Beziehung erfüllen, aber *nicht* stetig sind?

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert durch $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. Schliessen Sie daraus, dass Funktionen $q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ der Art

$$x \longmapsto q(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

stetig sind, wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen sind.

Aufgabe 8. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(U)$ offen ist.

Aufgabe 9 (Challenge)**.** In dieser Übung möchten wir zeigen, dass es zu einer monotonen Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ höchstens abzählbar viele Punkte geben kann, bei denen f nicht stetig ist (sogenannte Unstetigkeitsstellen). Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $A \subseteq [a, b]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f.

(i) Sei $x \in A$. Wir setzen

$$f_-(x) = \sup\{f(x') \mid x' \in [a, b], x' < x\}, \quad f_+(x) = \inf\{f(x') \mid x' \in [a, b], x' > x\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_-(x) < f_+(x)$ gilt. Wählen Sie anschliessend (Auswahlaxiom!) eine rationale Zahl $g(x)$ in $(f_-(x), f_+(x))$.

(ii) Zeigen Sie, dass $g : x \in A \longrightarrow g(x) \in \mathbb{Q}$ injektiv ist und schliessen Sie auf die Aussage.

Aufgabe 10 (Schreibstil)**.** Sei I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in I$ so, dass $f(x_0) \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(y) \neq 0$ für alle $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt.

Aufgabe 11. Welcher der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind gleichmässig stetig? Überzeugen Sie sich zuerst davon, dass die jeweils gegebene Funktion stetig ist, und skizzieren Sie den Graphen.

(1) $f(x) = \sqrt{|x|}$
(2) $f(x) = x^2$
(3) $f(x) = \min(\sqrt{|x|}, x^2)$
(4) $f(x) = \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x - k|$ (aus Aufgabe 1).
(5) $f(x) = \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x - k^2|$
(6) $f(x) = x \cdot \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x - k|$