Übungsserie 7

Zur Abgabe am 12. November: Aufgaben 2,5,6,9,11

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in X$ die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt:

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z).$$

Aufgabe 2. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge in einem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \qquad \text{und} \qquad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

für $x, y \in X$ Metriken d_1 und d_2 auf X definieren.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte in den reellen Zahlen, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4 + 15}{3n^4 + n^3 + n - 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5}{n^3 + n + 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 10}{n^2 + 1}$$

Verwenden Sie hier und auch sonst kein früher erlerntes Kochrezept, das Sie nicht begründen können.

Aufgabe 5 (Schreibstil)**.** Formulieren und beweisen Sie einen allgemeinen Satz über Grenzwerte von Folgen wie in Aufgabe 4.

Aufgabe 6. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge in $\mathbb{R}$ die durch $x_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass jeder Punkt $a \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist.

Aufgabe 7. Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$d_1(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\} \qquad \text{und} \qquad d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Metriken d_1 und d_2 auf X definieren. Für welche dieser Metriken konvergiert die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$? Benutzen Sie für letztere Frage ohne Beweis dass für $n \in \mathbb{N}$ und $a < b$ die Gleichung

$$(*) \qquad \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

gilt.

Aufgabe 8 (Schreibstil)**.** Geben Sie einen möglichst kurzen und eleganten Beweis der Formel $(*)$ aus Aufgabe 7.

Aufgabe 9. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$ gilt. Sei X die Teilmenge $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gerade die Häufungspunkte der Menge X sind.

Aufgabe 10. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $F \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass F abgeschlossen ist.

Aufgabe 11. Sei X eine Menge, und sei d die sogenannte *diskrete* Metrik auf X, gegeben durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X genau dann konvergiert, wenn sie schliesslich konstant ist.

Aufgabe 12 (Schreibstil)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definieren Sie den Begriff *offener* Teilmengen von X, und illustrieren Sie Ihre Definition an verschiedenen sinnvollen Beispielen.

Aufgabe 13. Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei d die durch

$$d(f,g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

gegebene Metrik auf X. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ eine Cauchy-Folge ist, aber nicht konvergiert. Benutzen Sie $(*)$ aus Aufgabe 7.

Aufgabe 14 (Recherche)**.** Wir möchten zeigen, dass die durch $x_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ gegebene Folge reeller Zahlen aus Aufgabe 6 in gewisser Weise gleichmässig auf $[0,1]$ verteilt ist. Versuchen Sie zuerst selbst eine Definition von *gleichmässig verteilt* zu geben. Lesen Sie anschliessend §1 (die ersten 5 Seiten) von Hermann Weyl's Artikel [W16].

Literatur

[W16] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Mathematische Annalen **77**, p. 313-352 (1916).