Übungsserie 9

Zur Abgabe am 26. November: Aufgaben 3, 6, 8, 9, 11

Benutzen Sie beim Lösen aller Aufgaben ausschliesslich die im Kurs eingeführten Mittel, und nicht irgendwelche Kochrezepte die Sie vielleicht aus dem Gymnasium kennen. In den Aufgaben 5 und 6 bezeichnet $\mathbb{R}[T]$ den Ring der Polynome in der Variablen T mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{R}$. Stellen Sie sicher, dass Sie den Unterschied zwischen einem Polynom $p \in \mathbb{R}[T]$ und der durch p definierten Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \longmapsto p(x)$ verstehen.

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$$

Aufgabe 2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(1) Der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\leq x}} f(x)$ existiert.

(2) Der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0< x}} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

Aufgabe 3. Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass der Grenzwert der Folge $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ existiert, aber nicht der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Wie übersetzt man für eine reelle Zahl A die Aussage

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

korrekt in eine Aussage über Konvergenz von Folgen? Beweisen Sie!

Aufgabe 4. Stellen Sie eine aussagekräftige Sammlung von Funktionsgraphen zusammen, die die verschiedenen Grenzwerte in den Tabellen 1,2,3,4 aus der Vorlesung vom 14. November illustrieren. Geben Sie ebenfalls Beispiele, in denen diese Grenzwerte nicht existieren.

Aufgabe 5. Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ Polynome, mit $q \neq 0$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Nullstellen von pq. Wir betrachten die Funktion $x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ auf $\mathbb{R} \setminus X$. Beschreiben Sie, wie man die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

für $x_0 \in X$ berechnet. An welchen Punkten $x_0 \in X$ kann man $\frac{p}{q}$ stetig fortsetzen? Welche Punkte $x_0 \in X$ sind Sprungstellen?

Aufgabe 6. Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom, $p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $q \in \mathbb{R}[T]$ existiert, so dass

$$q(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $p(T) = T^n$, und schliessen Sie auf den allgemeinen Fall in dem Sie die Linearität des Grenzwertes ausnutzen.

Aufgabe 7 (Recherche)**.** Definieren Sie die **Primzahlfunktion** $\pi : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{N} \mid \ p \text{ ist eine Primzahl und } p \leq x\}$$

Was kann man über das asymptotische Verhalten der Primzahlfunktion für $x \longrightarrow \infty$ sagen? Was besagt der Primzahlsatz? Der **Integrallogarithmus** $\mathrm{Li} : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert durch

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

Versuchen Sie zu zeigen, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \mathrm{Li}(x) = 1$$

gilt, und formulieren Sie den Primzahlsatz mit Hilfe des Integrallogarithmus. Die berühmte **Riemann Hypothese** ist äquivalent zur Aussage

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x} \cdot \log(x)).$$

Wie ist diese Aussage zu verstehen? Formulieren Sie aus, was die Landau Notation hier genau bedeutet.

Aufgabe 8. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und es bezeichne $\mathcal{N}$ die Menge aller Normen auf V. Zeigen Sie, dass Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{N}$ definiert.

Aufgabe 9. Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie, dass

$$\|(x_n)_{n=0}^\infty\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \|(x_n)_{n=0}^\infty\|_* = \sup\{2^{-n}|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_*$ auf V definieren. Zeigen Sie, dass diese beiden Normen nicht äquivalent sind. Finden Sie eine Folge $(v_n)_{n=0}^\infty$ in V, die für die Norm $\|\cdot\|_*$ konvergiert, aber nicht für die Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 10 (Schreibstil)**.** Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in dem Sie folgt vorgehen: Es seien Vektoren v und w in $\mathbb{R}^n$ gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass $f(x) = \|v + xw\|^2$ als ein Polynom von Grad 2 in x mit reellen Koeffizienten aufgefasst werden kann und finden Sie dazu die Koeffizienten.
(2) Das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ nimmt nur nicht-negative Werte an, und hat damit höchstens eine reelle Nullstelle. Folgern Sie, dass die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ von f nicht-positiv ist.
(3) Berechnen Sie die Diskriminante von f.

Aufgabe 11. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl, und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Abschätzung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2$$

gilt. Schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Aufgabe 12. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19.99 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $x = y = 10$. Was passiert mit der Lösung wenn man 0.99 in der Matrix linkerhand durch 1.001 ersetzt. Formulieren Sie Ihre Beobachtung in dem Sie den Begriff des uneigentlichen links- und rechtsseitigen Grenzwertes benutzen. Beweisen Sie! Was bedeutet das für eine Anwendung, in der die Matrixeinträge physikalische Messwerte darstellen?

Aufgabe 13 (Challenge)**.** Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0,1]$ der Ring der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir können $\mathcal{C}$ auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten, und in diesem Sinne die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

gegebene Norm auf $\mathcal{C}$. Überprüfen Sie, dass für jedes $t \in [0,1]$ die Abbildung

$$a_t : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad a_t(f) = f(t)$$

die Abbildung a_t sowohl stetig, als auch ein Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es für *jeden* stetigen Ringhomomorphismus $a : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein eindeutiges $t \in [0,1]$ gibt, mit $a = a_t$.