Übungsserie 10

Zur Abgabe am 3. Dezember: Aufgaben 1, 2, 8, 12, 14

Aufgabe 1. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, und sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie dass die Abbildung $\|\cdot\|_{(d)} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\|f\|_{(d)} = \Big(\int_0^1 x^d f(x)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf V ist. Zeigen Sie, dass für $d \neq d'$ die Normen $\|\cdot\|_{(d)}$ und $\|\cdot\|_{(d')}$ nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, sei $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion und sei $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \iff A = \sup\left\{ \sum_{k\in K} a_k \;\middle|\; K \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich}\right\}$$

und folgern Sie daraus

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \iff A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Vergleichen Sie dies mit dem Umordnungssatz für absolut konvergierende Reihen.

Aufgabe 3. Sei S eine Menge, und für jedes $s \in S$ sei a_s eine nichtnegative reeller Zahl. Definieren Sie $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$A = \sup\left\{ \sum_{k\in K} a_k \;\middle|\; K \subseteq S \text{ endlich}\right\}.$$

Zeigen sie, dass

$$A < \infty \implies \{s \in S \mid a_s \neq 0\} \text{ ist abzählbar.}$$

gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N}_{>0} \longrightarrow \mathbb{N}_{>0}$ existiert, so dass gilt:

$$9001 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)}}{\varphi(n)}.$$

Aufgabe 5. Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit $0 \le a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie einen detaillierten Beweis für die Aussage:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Wolframalpha.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für eine komplexe Zahl z mit $|z| < 1$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}+1}{3^n}$

(c) $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ für $k \in \mathbb{N}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$

Aufgabe 7. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren. Wo möglich, fragen Sie Wolframalpha nach den Grenzwerten.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n(-1)^n}{(2n)!}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{n}{n+1})$ (k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

(m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell(n)}}{n}$ (o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(\sqrt{2})^n \log(n)}$ (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-2})$

In (g) steht F_n für die n-te Fibonacci Zahl, also $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ und so weiter, rekursiv $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. In (n) steht $\ell(n)$ für die grösste natürliche Zahl m mit der Eigenschaft $10^m \le n$, also $\ell(n) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$.

Aufgabe 8. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 9. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Benutzen Sie Aufgabe 8 um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

Aufgabe 10 (Challenge)**.** Für $n \geq 1$ bezeichne p_n die n-te Primzahl, also $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Zeigen Sie, dass die folgende Reihe (hier in zwei alternativen Notationen gegeben) divergiert.

$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

Sie können daraus folgern, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Das Resultat geht auf Leonhard Euler (1737) zurück.

Aufgabe 11. Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei $\|\cdot\|_\infty$ die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

gegebene Norm auf V. Sei $f_n \in V$ die Funktion $f_n(x) = (x+3)^{-n}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

konvergiert, und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 12. Sei V der Vektorraum der 2×2-Matrizen mit reellen Koeffizienten. Sei $A \in V$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} A^n$$

konvergiert. Verallgemeinern Sie das Resultat für $d \times d$ Matrizen.

Aufgabe 13. Für reelle Zahlen a und x berechnet Euler a^x nach folgendem Rezept: Schreibe $a-1 = b$ und wende den binomischen Lehrsatz auf $(1+b)^x$ an - was auch immer das bedeuten mag:

$$a^x = (1+b)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n} b^n$$

Für welche a, x können Sie zeigen, dass die Reihe rechts konvergiert? Falls sie konvergiert, ist der Grenzwert wirklich die reelle Zahl $a^x = \exp(x\log(a))$? Was passiert wenn x eine ganze Zahl ist?

Aufgabe 14. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen die gegen 0 konvergiert. Wir definieren

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

im gleichen Sinn wie auch Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ konvergiert, mit Grenzwert} \neq 0.$$

Hinweis: Beweisen und benutzten Sie, dass $\frac{1}{2}x \leq \log(1+x) \leq x$ für genügend kleine $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Aufgabe 15. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie die **Euler'sche Produktformel**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Begründen Sie alle Reihenumformungen. <u>Hinweis:</u> Begründen Sie mit Aufgaben 9 und 14, dass die Reihe und das unendliche Produkt überhaupt konvergieren. Rufen Sie sich dann die geometrische Reihe in Erinerung, und verwenden Sie geschickt den Hauptsatz der Arithmetik.

Aufgabe 16 (Recherche)**.** Seien s und t ganze Zahlen mit $s \geq 2$ und $t \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{und} \qquad \zeta(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{n^s m^t}$$

konvergieren. Man nennt die Werte dieser Reihen **Multizetawerte**. Die verschiedenen algebraischen Relationen zwischen solchen Multizetawerten sind bis heute nicht vollständig geklärt, und Gegenstand mathematischer Forschung. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\zeta(3) = \zeta(2,1) \qquad \text{und} \qquad \zeta(3)\zeta(3) = 2\zeta(3,3) + \zeta(6).$$

Begründen Sie alle Reihenumformungen. Können Sie noch weitere ähnliche Relationen finden?