# Übungsserie 13

Nicht zur Abgabe.

**Aufgabe 1.** Auf der letzten Seite finden Sie eine Sammlung von bestimmten Integralen. Üben Sie das Integrieren solange, bis sie diese im Schnitt in 20 Minuten berechnen können. Bei Unsicherheit überprüfen Sie Ihr Resultat mit Wolframalpha.

**Aufgabe 2.** Zeigen

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \log(3).$$

**Aufgabe 3.** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = e^{-x^2}$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Stammfunktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $f$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ existiert. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\frac{1}{2x}e^{-x^2}}.$$

**Aufgabe 4.** Seien $a < b$ reell, und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, derart, dass

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt. Zeigen Sie die **Grönwall Ungleichung**:

$$|f(x)| \leq |f(a)| \exp\left(\int_a^x |g(t)|dt\right) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

**Aufgabe 5.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $I_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!} e^{xt} dt.$$

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 0$ ein Polynom $P_n$ von Grad $n$ gibt, so dass

$$I_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} \left(e^x P_n(x) - e^{-x} P_n(-x)\right)$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass für jede reelle Zahl $x \neq 0$ mindestens eine der beiden Zahlen $\{x, e^x\}$ irrational ist.

**Aufgabe 6.** Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{re}(z) > 0$ definiert man

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx. \tag{1}$$

Überprüfen Sie, dass das Integral 1 für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{re}(z) > 0$ konvergiert. Zeigen Sie dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{re}(z) > 0$ die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$

gilt. Verwenden Sie anschliessend die Funktionalgleichung um für ganze Zahlen $n$ rekursiv $\Gamma(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ mit $\mathrm{re}(z) > n$ zu definieren, so dass schliesslich $\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ definiert ist, und (2) auf dem ganzen Definitionsbereich erfüllt.

**Aufgabe 7** (Lektüre)**.** Finden und lesen Sie den Artikel von David Hilbert, *Über die Transzendenz der Zahlen* e *und* $\pi$, Math. Annalen **43**, 216-219 (1893). Hier zeigt Hilbert, wie man mit Hilfe uneigentlicher Integrale und der Gamma Funktion zeigen kann, das $e = \exp(1)$ und $\pi$ nicht nur irrational, sondern sogar transzendent sind.

**Aufgabe 8** (Challenge)**.** Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$.

Lösung: Hier

**Aufgabe 9** (Lüstig Weihnachtsaufgabe)**.** Finden Sie alle Funktionen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. (Shortlist IMO, 2014)

**Aufgabe 10** (Lüstig Weihnachtsaufgabe)**.** Sei $f : \mathbb{N}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$ eine bijektive Funktion. Angenommen, die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gegeben durch

$$x_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt (Romanian Mathematics National Competition *Calude*, 2000).

(1) $\int_0^3 \exp(\sqrt{x+1})dx$

(2) $\int_0^{n/3} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)+\tan^2(x)}dx$

(3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

(4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1}$

(5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$

(6) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(7) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$

(8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(2x)dx$

(9) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

(10) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

(11) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$

(12) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(13) $\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

(14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)dx$

(15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$

(16) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

(17) $\int_0^1 \frac{dx}{2\cosh(x)+\sinh(x)+1}$

(18) $\int_1^2 \frac{x^2\log(x)}{(x^3+1)^3}dx$

(19) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

(20) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

(21) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

(22) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}dx$

(23) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

(24) $\int_1^2 (x^2+1)\log(x)dx$

(25) $\int_0^{1/2} (\arcsin(x))^2dx$

(26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx$

(27) $\int_1^2 \log^2(x)dx$

(28) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

(29) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

(30) $\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}dx$

(31) $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}dx$

(32) $\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$

(33) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

(34) $\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$

(35) $\int_0^1 \frac{\cosh(x)}{e^x+1}dx$

(36) $\int_0^1 \arctan(x)dx$

(37) $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)dx$

(38) $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)dx$

(39) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2(x)dx$

(40) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx$

(41) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}dx$

(42) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}$

(43) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}dx$

(44) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}dx$

(45) $\int_1^e \sin(\log(x))dx$

(46) $\int_1^2 \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$

(47) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$

(48) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

(49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}dx$

(50) $\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}dx$